



**TUGAS AKHIR - SM141501**

## **ANALISIS BIFURKASI HOPF PADA SISTEM EKO-EPIDEMIOLOGI**

**DITA PUTRILIANA  
NRP 1213 100 102**

**Dosen Pembimbing  
Drs. M. Setijo Winarko, M.Si  
Drs. Lukman Hanafi, M.Sc**

**DEPARTEMEN MATEMATIKA  
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam  
Institut Teknologi Sepuluh Nopember  
Surabaya  
2017**

*“ Halaman sengaja dikosongkan “*



**FINAL PROJECT - SM141501**

## **HOPF BIFURCATION ANALYSIS ON ECO-EPIDEMIOLOGY SYSTEM**

**DITA PUTRILIANA  
NRP 1213 100102**

**Supervisor  
Drs. M. Setijo Winarko, M.Si  
Drs. Lukman Hanafi, M.Sc**

**MATHEMATICS DEPARTMENT  
Faculty of Mathematics and Science  
Sepuluh Nopember Institute of Technology  
Surabaya  
2017**

*“ Halaman ini sengaja dikosongkan “*

# LEMBAR PENGESAHAN

## ANALISIS BIFURKASI HOPF PADA SISTEM EKO-EPIDEMIOLOGI

### *HOPF BIFURCATION ANALYSIS ON ECO-EPIDEMIOLOGY SYSTEM*

#### TUGAS AKHIR

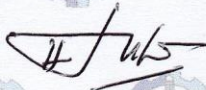
Diajukan untuk memenuhi salah satu syarat  
Untuk memperoleh gelar Sarjana Sains  
Pada bidang studi "Pemodelan dan Simulasi Sistem"  
Program Studi S-1 Departemen Matematika  
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam  
Institut Teknologi Sepuluh Nopember Surabaya

Oleh :  
DITA PUTRILIANA  
NRP. 1213 100 102

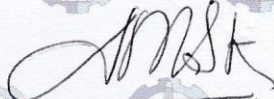
Menyetujui,

Dosen Pembimbing II,

Dosen Pembimbing I,




Drs. Lukman Hanafi, M.Sc  
NIP. 19640624 198803 1 001



Drs. M Setijo Winarko, M.Si  
NIP. 19640920 199002 1 002

Mengetahui,

Kepala Departemen Matematika  
FMIPA ITS



Dr. Hani Mukhlash, S.Si, MT  
NIP. 19700831 199403 1 003

Surabaya, Juli 2017



## ANALISIS BIFURKASI HOPF PADA SISTEM EKO-EPIDEMIOLOGI

Nama Mahasiswa : Dita Putriliana  
NRP : 1213 100 102  
Departemen : Matematika FMIPA-ITS  
Dosen Pembimbing : 1. Drs. M. Setijo Winarko, M.Si  
2. Drs. Lukman Hanafi, M.Sc

### **Abstrak**

Eko-epidemiologi merupakan ilmu yang mempelajari suatu penyebaran penyakit yang terjadi dalam sistem predator-prey. Umumnya sebuah sistem predator-prey mempunyai orbit periodik, sehingga dengan adanya orbit periodik dapat diidentifikasi eksistensi bifurkasi Hopf pada sistem tersebut.

Pada Tugas Akhir ini dikaji mengenai sistem eko-epidemiologi dengan respon fungsional Holling tipe II dengan mencari titik kesetimbangan, kestabilan lokal titik kesetimbangan, dan eksistensi bifurkasi Hopf. Kestabilan non trivial dianalisis dengan menggunakan kriteria Routh-Hurwitz. Bifurkasi Hopf terjadi pada titik kesetimbangan  $E_2$  dan  $E_4$ . Hasil analisis menunjukkan adanya bifurkasi Hopf yang mengelilingi titik kesetimbangan positif ketika  $r = r_c$ . Untuk mendukung hasil analisis dilakukan simulasi numerik dengan menggunakan Runge-Kutta orde empat.

**Kata kunci :** Model eko-epidemiologi, respon fungsional, bifurkasi Hopf, Runge-Kutta orde 4.

*“ Halaman ini sengaja dikosongkan ”*



## HOPF BIFURCATION ANALYSIS ON ECO-EPIDEMIOLOGY SYSTEM

Name : Dita Putriliana  
NRP : 1213 100 102  
Department : Mathematics FMIPA-ITS  
Supervisors : 1. Drs. M. Setijo Winarko, M.Si  
2. Drs. Lukman Hanafi, M.Sc

### ***Abstract***

*Eco-epidemiology is a science of a disease spread that studies about disease transmission that occurs in predator-prey system. Generally, a predator-prey system has a periodic orbit, so that in the presence of a periodic orbit can be identified the existence of Hopf bifurcation in the system.*

*This reaserch reviewed about eco-epidemiological system with type II of Holling functional response by finding equilibrium point, local stability of equilibrium point, and the existence of Hopf bifurcation. Non trivial stability is analysed by using Routh-Hurwitz criterion. Hopf bifurcation occursat the equilibrium point  $E_2$  and  $E_4$ . The result of the analysis shows that there is a Hopf bifurcation that surrounds the positive equilibrium point when  $r = r_c$ . To support the result of the analysis, a numerical simulation is performed by using the Runge-Kutta 4<sup>th</sup> order.*

***Keywords :*** *eco-epidemiological model, functional response, Hopf bifurcation, Runge-Kutta orde 4*

*“Halaman ini sengaja dikosongkan”*

## KATA PENGANTAR

Puji syukur penulis panjatkan atas kehadiran Tuhan Yang Maha Esa, karena hanya dengan karunia rahmat, bimbingan, serta anugrah-Nya penulis dapat menyelesaikan Tugas Akhir yang berjudul **Analisis Bifurkasi Hopf pada Sisteml Eko-Epidemiologi**.

Dalam proses pembuatan Tugas Akhir ini, penulis mendapat bantuan dan dukungan dari berbagai pihak. Untuk itu penulis mengucapkan terima kasih kepada :

1. Bapak Dr. Imam Mukhlash, S.Si, MT selaku Ketua Departemen Matematika FMIPA-ITS.
2. Bapak Drs. M. Setijo Winarko, M.Si. dan Bapak Drs. Lukman Hanafi, M. Sc. sebagai dosen pembimbing Tugas Akhir atas segala bimbingan dan motivasi yang telah diberikan pada penulis.
3. Bapak Drs. Hariyanto, M.Si, Drs. Kamiran, M.Si, dan Drs. I Gst. Ngr. Rai Usadha, M.Si selaku dosen penguji Tugas Akhir.
4. Bapak Drs. Iis Herisman, M.Si selaku Koordinator Tugas Akhir.
5. Ibu Soleha, S.Si, M.Si selaku dosen wali penulis yang telah memberikan motivasi dan arahan akademik.
6. Bapak dan Ibu dosen serta seluruh staf Tata Usaha dan Laboratorium Jurusan Matematika FMIPA-ITS.
7. Bapak Wuryanto dan Ibu Sri Rahayu selaku orangtua penulis yang selalu memberika doa dan dukungan baik moral maupun material serta Dateng Aditya Graha, Bayu Anggoro, dan Cahya Danu Prastian selaku kakak yang selalu mendoakan penulis dan selalu memberi semangat.
8. Keluarga besar Paino yang selalu mendoakan penulis.
9. Anissa Eka dan Aulia Dian sebagai sahabat yang selalu menyemangati penulis.
10. Chyntia, Bara, Fadhlán, dan Jonbon sebagai keluarga baru di surabaya yang susah senang selalu menemani penulis

selama proses perkuliahan dan proses mengerjakan Tugas Akhir ini.

11. April, Tisam, Atan, Erike, Maul, Bahar, Eizel, Regina yang selalu menyemangati dan menghibur penulis dengan canda tawa, semoga kekeluargaan kita masih akan terus berlanjut.
12. Teman-Teman seperjuangan TA Matematika 2013 terima kasih atas kebersamaan dan bantuannya selama menyelesaikan TA.
13. Teman-Teman LAMBDA 13 dan semua teman Matematika Angkatan 2013, terima kasih atas semangat dan doanya.
14. Teman-Teman UKM MUSIK ITS yang turut menyemangati dan mendoakan penulis.
15. Para senior mbak azi dan mas haqul yang telah membantu penulis dalam pengerjaan Tugas Akhir ini.
16. Teman-teman SENOGEN yang selalu menyemangati penulis.
17. Semua pihak yang tidak dapat penulis sebutkan satu peratu, yang telah memberikan doa serta dukungannya.

Penulis menyadari bahwa selama masa penelitian dan penyusunan laporan ini masih banyak kekurangan dan kesalahan. Oleh karena itu, penulis memohon saran dan kritik sebagai bahan perbaikan di masa yang akan datang. Semoga Tugas Akhir ini bermanfaat bagi semua pihak.

Surabaya, Juni 2017

Penulis

## DAFTAR ISI

HALAMAN JUDUL .....	i
LEMBAR PENGESAHAN .....	v
ABSTRAK.....	vii
<i>ABSTRACT</i> .....	ix
KATA PENGANTAR .....	xi
DAFTAR ISI .....	xiii
DAFTAR GAMBAR.....	xvii
DAFTAR TABEL .....	xix
DAFTAR SIMBOL .....	xxi
DAFTAR LAMPIRAN.....	xxiii
BAB I PENDAHULUAN.....	1
1.1 Latar Belakang.....	1
1.2 Rumusan Masalah.....	3
1.3 Batasan Masalah .....	4
1.4 Tujuan .....	4
1.5 Manfaat .....	4
1.6 Sistematika Penulisan Tugas Akhir .....	4
BAB II TINJAUAN PUSTAKA .....	7
2.1 Peneliti Terdahulu.....	7
2.2 Model Eko-Epidemiologi .....	8
2.3 Respon Fungsional Holling .....	8
2.4 Sistem Kompartemen.....	9
2.5 Persamaan Diferensial Homogen.....	10
2.6 Linearisasi.....	11
2.7 Kestabilan Asimtotis Lokal .....	12
2.8 Kriteria Kestabilan Routh-Hurwitz.....	14
2.9 Bifurkasi Hopf .....	16
2.10 Metode Numerik Runge-Kutta Orde 4 .....	18
BAB III METODE PENELITIAN .....	21
3.1 Studi Literatur .....	21

3.2	Tahap Mengkaji Model.....	21
3.3	Tahap Menentukan Titik Keseimbangan .....	21
3.3.1	Menentukan Titik Keseimbangan Trivial .....	21
3.3.1.1	Menganalisis Kestabilan Titik Keseimbangan Trivial .....	21
3.3.2	Menentukan Titik Keseimbangan Bebas Penyakit ...	21
3.3.1.2	Menganalisis Kestabilan Titik Keseimbangan Bebas Penyakit.....	22
3.3.3	Menentukan Titik Keseimbangan Bebas Predator....	22
3.3.1.3	Menganalisis Kestabilan Titik Keseimbangan Bebas Predator .....	22
3.3.4	Menentukan Titik Keseimbangan Planar.....	22
3.3.1.4	Menganalisis Kestabilan Titik Keseimbangan Planar .....	22
3.3.5	Menentukan Titik Keseimbangan Non Trivial .....	22
3.3.1.4	Menganalisis Kestabilan Titik Keseimbangan Non Trivial.....	22
3.4	Menentukan Eksistensi dan Bifurkasi Hopf .....	23
3.5	Membuat Simulasi .....	23
3.6	Kesimpulan dan Saran .....	23
3.7	Penyusunan Laporan Hasil Penelitian .....	23
3.8	Diagram Alir .....	24
BAB IV ANALISIS DAN PEMBAHASAN.....		25
4.1	Model Eko-Epidemiologi dengan Respon Fungsional Holling Tipe II .....	25
4.2	Daerah Penyelesaian .....	28
4.3	Titik Keseimbangan Trivial .....	32
4.4	Analisis Kestabilan Titik Keseimbangan Trivial.....	33
4.5	Kestabilan Titik Keseimbangan Bebas Penyakit .....	36
4.6	Titik Keseimbangan Bebas Predator .....	38
4.7	Analisis Kestabilan Titik Keseimbangan Bebas Predator .....	39
4.8	Titik Keseimbangan Planar.....	43
4.9	Analisis Kestabilan Titik Keseimbangan Planar .....	45

4.10 Titik Keseimbangan Non Trivial .....	49
4.11 Analisis Kestabilan Titik Keseimbangan Non Trivial .....	51
4.12 Analisis Bifurkasi Hopf .....	53
4.13 Simulasi Numerik .....	61
 BAB V PENUTUP .....	 69
Kesimpulan .....	69
Saran .....	69
DAFTAR PUSTAKA .....	71
LAMPIRAN .....	73

*“ Halaman ini sengaja dikosongkan “*



## DAFTAR GAMBAR

Gambar 2.1	Diagram Kompartemen Sistem Sederhana .....	9
Gambar 3.1	Diagram Alir Penelitian .....	24
Gambar 4.1	Diagram Kompartemen Model Eko-Epidemiologi dengan Respon Fungsional Holling Tipe II .....	26
Gambar 4.2	Orbit Periodik 2D Model Eko-Epidemiologi dengan Respon Fungsional Holling Tipe II .....	62
Gambar 4.3	Plot Terhadap Waktu .....	62
Gambar 4.4	Plot Terhadap Waktu pada Saat $r=0.85$ .....	68
Gambar 4.4	Plot Terhadap Waktu pada Saat $r=2.41$ .....	69

*“ Halaman ini sengaja dikosongkan ”*

## **DAFTAR TABEL**

Tabel 2.1	Kriteria Kestabilan Titik Keseimbangan .....	14
-----------	--	----

*“ Halaman ini sengaja dikosongkan ”*

## DAFTAR SIMBOL

$s$	: populasi prey yang rentan
$i$	: populasi prey yang terinfeksi
$p$	: populasi predator
$r$	: rata-rata pertumbuhan intrinsik konstan dari prey yang rentan
$K$	: daya dukung lingkungan untuk total populasi prey
$\lambda$	: rata-rata kontak
$\theta_1$	: rata-rata predasi maksimum dari populasi prey yang rentan
$\theta_2$	: rata-rata konversi prey yang rentan untuk populasi predator
$d$	: setengah saturasi tindakan konstan sejauh mana lingkungan memberikan perlindungan kepada populasi prey
$m$	: rata-rata preferensi predator antara $s$ dan $i$
$m_1$	: rata-rata predasi maksimum populasi prey yang terinfeksi
$m_2$	: rata-rata konversi prey yang terinfeksi untuk populasi predator
$\mu$	: total rata-rata kematian prey yang terinfeksi karena hal lain
$\mu_1$	: total rata-rata kematian populasi predator
$r_c$	: nilai kritis dari $r$

*“ Halaman ini sengaja dikosongkan ”*

## DAFTAR LAMPIRAN

A	Listing Program Kurva Kestabilan dan Bifurkasi Hopf pada Model Eko-Epidemiologi dengan Respon Fungsional Holling Tipe II.....	107
---	---	-----

*“ Halaman ini sengaja dikosongkan ”*



# **BAB I**

## **PENDAHULUAN**

Bab ini membahas latar belakang yang mendasari penulisan Tugas Akhir. Didalamnya mencakup identifikasi permasalahan yang akan dirumuskan menjadi permasalahan dan batasan-batasan masalah untuk membatasi pembahasan pada Tugas Akhir ini.

### **1.1 Latar Belakang**

Semua makhluk hidup selalu bergantung kepada makhluk hidup lain dan juga lingkungannya. Ilmu yang mempelajari tentang hubungan makhluk hidup dengan habitatnya disebut ekologi [2]. Antara populasi yang satu dengan populasi yang lain selalu terjadi interaksi secara langsung atau tak langsung. Interaksi tersebut dapat terjadi, baik antar individu dalam populasi atau antar individu berbeda populasi. Bentuk interaksi tersebut dapat berupa saling menguntungkan, saling merugikan, atau hanya salah satu saja yang diuntungkan. Interaksi antar makhluk hidup biasanya akan membentuk hubungan khusus yang berpengaruh secara nyata terhadap persebaran dan kepadatannya.

Salah satu jenis interaksi antar populasi makhluk hidup adalah predasi, sedangkan model matematika yang menggambarkan predasi dinamakan predator-prey [3]. Predator-prey merupakan salah satu sistem dimana populasi dua individu digabungkan yaitu populasi prey dan populasi predator, dimana peningkatan jumlah predator akan menyebabkan penurunan jumlah prey tetapi peningkatan jumlah prey dapat menyebabkan jumlah predator meningkat [2]. Kemampuan predator dalam mengendalikan populasi prey

tersebut dapat dipelajari dalam respon fungsional. Respon fungsional merupakan komponen dasar untuk melihat interaksi antara prey dengan predator yaitu salah satu individu predator mengubah laju penyerangannya ketika kepadatan prey berubah [4]. Respon fungsional mendeskripsikan sifat biologis dari kedua populasi yang dipengaruhi oleh kemampuan prey melarikan diri, struktur lingkungan prey, dan waktu yang dibutuhkan predator untuk mengkonsumsi prey sebelum memulai untuk mencari prey lagi [1].

Jumlah populasi dalam suatu ekosistem dipengaruhi oleh banyak hal, salah satunya adalah penyebaran penyakit menular. Penyebaran penyakit menular merupakan faktor penting yang mempengaruhi interaksi yang terjadi antar populasi makhluk hidup. Penyakit menular yang menginfeksi populasi dalam predator-prey akan memberikan pengaruh kepada populasi predator ataupun populasi prey. Ilmu yang mempelajari tentang penyebaran penyakit serta faktor yang terkait ditingkat populasi disebut epidemiologi [5], sedangkan cabang ilmu yang baru dalam matematika biologi yang menganggap kedua isu ekologi dan epidemiologi terjadi secara bersamaan dan berpotensi menghubungkan dua bidang ini bersama-sama disebut eko-epidemiologi [6]. Pada sistem eko-epidemiologi ini terbagi menjadi dua populasi yaitu populasi prey dan populasi predator, dimana populasi prey terinfeksi suatu penyakit menular sehingga populasi prey terbagi menjadi dua yaitu populasi prey yang rentan dan terinfeksi. Jika rata-rata pertumbuhan prey yang rentan tinggi dan populasi predator memakan populasi prey yang rentan lebih banyak dari pada yang terinfeksi maka osilasi pada sistem ini akan terus berjalan seiring dengan berjalannya waktu, tetapi jika rata-rata pertumbuhan populasi prey yang rentan rendah dan populasi predator memakan

populasi prey yang rentan lebih sedikit maka osilasi yang terjadi pada sistem ini akan berhenti pada waktu tertentu. Hal ini menyebabkan suatu sistem terjadi perubahan kestabilan dan memunculkan suatu bifurkasi.

Bifurkasi adalah perubahan kestabilan titik kesetimbangan pada sistem [2]. Bifurkasi memiliki beberapa macam jenis, salah satunya adalah bifurkasi Hopf. Pada umumnya sebuah sistem predator-prey mempunyai orbit periodik, sehingga dengan adanya orbit periodik dapat diidentifikasi eksistensi bifurkasi Hopf pada sistem tersebut. Bifurkasi Hopf terjadi apabila matriks Jacobian pada sistem mempunyai sebuah pasangan bilangan kompleks dengan nilai eigen bagian real bernilai nol dan nilai bagian imajiner tidak sama dengan nol. Selain itu, diperlukan juga adanya analisis mengenai kestabilan titik kesetimbangan pada sistem untuk mengetahui arah dari bifurkasi Hopf tersebut.

Berdasarkan latar belakang di atas, pada Tugas Akhir ini akan dilakukan analisis bifurkasi Hopf pada sistem eko-epidemiologi dengan menggunakan respon fungsional Holling tipe II yang dipelajari oleh Ranjit Kumar Upadhyay dan Paramita Roy [1]. Setelah itu akan dilakukan simulasi bifurkasi Hopf dengan menggunakan *software* MATLAB.

## 1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan uraian di atas, permasalahan yang diselesaikan dalam Tugas Akhir ini adalah :

1. Bagaimana analisis bifurkasi Hopf pada sistem eko-epidemiologi ?
2. Bagaimana menentukan simulasi dari hasil analisis bifurkasi Hopf ?

### 1.3 Batasan Masalah

Berdasarkan rumusan masalah di atas, batasan masalah dari Tugas Akhir ini adalah :

1. Model yang digunakan adalah model eko-epidemiologi dengan respon fungsional Holling tipe II
2. Penyebab penyakit terjadi pada populasi prey dengan penyebaran tipe SI.
3. Simulasi menggunakan MATLAB.

### 1.4 Tujuan

Adapun tujuan Tugas Akhir ini adalah sebagai berikut :

1. Mengetahui eksistensi bifurkasi Hopf pada sistem eko-epidemiologi
2. Menentukan simulasi dari hasil analisis bifurkasi Hopf.

### 1.5 Manfaat

Manfaat Tugas Akhir ini adalah sebagai berikut :

1. Sebagai suatu bentuk kontribusi dalam pengembangan ilmu matematika terapan.
2. Memberikan informasi mengenai model eko-epidemiologi, penghitungan dan analisis kestabilan dan bifurkasi Hopf.
3. Sebagai literatur penunjang bagi mahasiswa yang menempuh jenjang sarjana.

### 1.6 Sistematika Penulisan Tugas Akhir

Sistematika dari penulisan Tugas Akhir ini adalah sebagai berikut :

#### 1. BAB I PENDAHULUAN

Bab ini membahas latar belakang yang mendasari penulisan Tugas Akhir. Didalamnya mencakup identifikasi permasalahan yang akan dirumuskan menjadi permasalahan dan batasan-batasan masalah untuk membatasi pembahasan pada Tugas Akhir ini.

2. **BAB II TINJAUAN PUSTAKA**

Bab ini membahas landasan teori yang mendasari penulisan Tugas Akhir.

3. **BAB III METODOLOGI PENELITIAN**

Bab ini menguraikan metode yang digunakan dalam penelitian secara rinci. Metodologi penelitian yang digunakan berguna sebagai acuan sehingga penelitian dapat berjalan sistematis.

4. **BAB IV ANALISIS DAN PEMBAHASAN**

Bab ini dibahas mengenai titik kesetimbangan dan kestabilan lokal dari setiap titik kesetimbangan, serta analisis bifurkasi Hopf dari model eko-epidemiologi. Selanjutnya akan ditentukan penyelesaian solusi numerik dari model dan mensimulasikan dengan menggunakan MATLAB.

5. **BAB VI PENUTUP**

Bab ini berisi kesimpulan yang diperoleh dari pembahasan masalah sebelumnya serta saran yang diberikan untuk pengembangan selanjutnya.

*“ Halaman ini sengaja dikosongkan “*

## **BAB II**

### **TINJAUAN PUSTAKA**

Bab ini membahas landasan teori yang mendasari penulisan Tugas Akhir.

#### **2.1 Penelitian Terdahulu**

Pada peneliti sebelumnya dilakukan oleh Upadhyay [7] mempelajari model eko-epidemiologi dengan mengasumsikan bahwa populasi ikan yang rentan menerapkan hukum logistik dan populasi ikan yang terinfeksi mati sebelum memiliki kapasitas reproduksi. Serta populasi predator tidak dapat membedakan populasi ikan yang rentan dan terinfeksi.

Penelitian terakhir dilakukan oleh Ranjit Kumar Upadhyay dan Paramita Roy [1] yaitu menganalisis model eko-epidemiologi yang dimodifikasi dari Upadhyay [7] dengan respon fungsional Holling tipe II. Mereka mengasumsikan bahwa hanya populasi prey rentan yang menerapkan hukum logistik dan masih dapat merasakan tekanan populasi dari yang terinfeksi serta menganggap bahwa predator tidak dapat membedakan antara populasi yang terinfeksi dan rentan. Mereka mengamati bahwa infeksi tidak hanya mengurangi rata-rata pertumbuhan  $r$  dari spesies prey, tetapi juga pemakan ikan yang terinfeksi.

Fatazia dalam Tugas Akhirnya membahas mengenai analisis kualitatif pada model SIR dengan fungsi pengobatan saturasi [8]. Pada Tugas Akhir tersebut ditemukan adanya bifurkasi Hopf superkritikal ketika  $\sigma < 1$  dan bifurkasi Hopf subkritikal ketika  $\sigma > 1$ .

Pada Tugas Akhir ini akan dilakukan analisis mengenai kestabilan lokal dan eksistensi bifurkasi hopf dari model eko-epidemiologi Ranjit Kumar Upadhyay dan Paramita Roy [1] dan metode yang digunakan berbeda dengan Fatazia [8].

## 2.2 Model Eko-Epidemiologi

Model dari Upadhyay [7] dideskripsikan sebagai berikut

$$\frac{ds}{dt} = rs \left( 1 - \frac{s+i}{K} \right) - \lambda si \quad (2.1)$$

$$\frac{di}{dt} = \lambda si - \frac{mip}{(i+a)} - \mu i \quad (2.2)$$

$$\frac{dp}{dt} = \frac{\theta ip}{(i+a)} - dp \quad (2.3)$$

Model di atas dimodifikasi oleh Ranjit Kumar Upadhyay dan Paramita Roy [1] yang dideskripsikan oleh persamaan diferensial sebagai berikut

$$\frac{ds}{dt} = rs \left( 1 - \frac{s+i}{K} \right) - \lambda si - \frac{\theta_1 sp}{ms+i+d} \quad (2.4)$$

$$\frac{di}{dt} = \lambda si - \frac{m_1 ip}{ms+i+d} - \mu i \quad (2.5)$$

$$\frac{dp}{dt} = \frac{\theta_2 sp}{ms+i+d} + \frac{m_2 ip}{ms+i+d} - \mu_1 p \quad (2.6)$$

dengan  $s(0) = s_0 > 0$ ,  $i(0) = i_0 > 0$ , dan  $p(0) = p_0 > 0$ . Semua parameter yang terlibat dalam sistem adalah positif,  $s$  adalah populasi prey yang rentan,  $i$  adalah populasi prey yang terinfeksi, dan  $p$  populasi predator. Jika laju pertumbuhan populasi prey yang rentan lebih tinggi dari pada laju kematiannya maka jumlah populasi prey yang rentan lebih banyak dari pada jumlah populasi prey yang terinfeksi. Jika predator lebih banyak memakan prey yang terinfeksi dari pada prey yang rentan maka jumlah populasi predator yang mati akibat tertular penyakit akan lebih banyak dari pada yang masih hidup. Jika laju penularan penyakit lebih cepat maka jumlah populasi prey yang terinfeksi semakin banyak.

## 2.3 Respon Fungsional Holling

Respon fungsional merupakan komponen dasar untuk melihat interaksi antara prey dengan predator yaitu salah satu

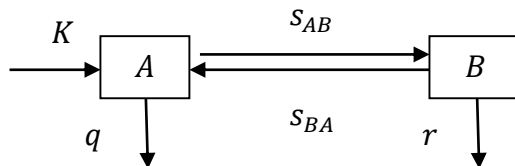


individu predator mengubah laju pemangsaannya ketika kepadatan prey berubah. Berdasarkan tingkah laku makan predator, respon fungsional kepadatan prey dibagi menjadi tiga tipe, yaitu [4] :

1. Tipe I, terlihat predator mempunyai sifat memangsa hanya sampai batas kemampuannya. Kemampuan untuk makan tidak bisa bertambah lagi meskipun kepadatan populasi prey bertambah.
2. Tipe II, predator akan lebih banyak memangsa apabila kepadatan prey tinggi. Akibatnya jumlah prey yang dimakan berubah menurut perubahan kepadatan.
3. Tipe III, predator akan memangsa prey dari jenis lainnya bila kepadatan prey pertamanya sedikit. Namun jika kepadatan mangsa pertamanya bertambah, maka predator akan memakan lebih banyak sampai batas kemampuan

## 2.4 Sistem Kompartemen

Sistem kompartemen merupakan sebuah susunan kerja atau proses yang menunjukkan aliran individu dari satu kompartemen ke kompartemen lainnya seperti saat individu tersebut sehat, tertular penyakit atau sembuh dari penyakit. Berikut ini adalah contoh sederhana bentuk sistem kompartemen [8] :



Gambar 2.1 Diagram Kompartemen Sistem Sederhana

Pada Gambar 2.4 diketahui terdapat dua kompartemen yang saling berhubungan yaitu  $A$  dan  $B$ . Nilai  $K$  merupakan nilai aliran yang masuk ke dalam kompartemen  $A$ .  $K$  dapat

berupa laju kelahiran atau laju imigrasi yang masuk ke dalam populasi. Nilai  $q$  merupakan nilai aliran yang keluar dari kompartemen  $A$ . Nilai  $r$  merupakan nilai yang keluar dari kompartemen  $B$ . Dalam hal ini nilai  $q$  dan  $r$  dapat berupa laju kematian alami dari populasi atau laju kematian yang disebabkan oleh penyakit. Nilai  $S_{AB}$  dan  $S_{BA}$  merupakan nilai yang menunjukkan hubungan antara kompartemen  $A$  dan  $B$ .

## 2.5 Persamaan Diferensial Homogen

Pandang sistem homogen [15]:

$$X' = AX \quad (2.7)$$

dimana  $A_{n \times n}$  adalah matrik dengan elemen bilangan real. Misalkan

$$x = e^{\lambda t} v, \quad \lambda = \text{skalar} \quad (2.8)$$

$$v = \text{vektor}$$

adalah penyelesaian sistem PD (2.11) sehingga

$$x = \lambda e^{\lambda t} v$$

karena  $X = e^{\lambda t} v$  adalah penyelesaian (2.8) jika dan hanya jika

$$\lambda e^{\lambda t} v = e^{\lambda t} A v$$

hal ini mengakibatkan, jika dan hanya jika

$$\lambda v = A v$$

akan tetapi hal ini memberikan kenyataan  $\lambda$  haruslah nilai eigen dari  $A$  yang berpautan dengan vektor eigen  $v$ .

Konsekuensinya, dapat dibuktikan dengan teorema berikut :

***Teorema 2.3*** Misalkan  $A_{n \times n}$  matriks dengan elemen real konstan dan  $\lambda$  nilai eigen dari  $A$  yang berhubungan dengan vector eigen  $v$ . Maka

$$x(t) = e^{\lambda t} v$$

adalah penyelesaian dari system PD linier  $x' = Ax$  dalam suatu interval.

## 2.6 Linearisasi

Titik kesetimbangan dari sistem merupakan titik dimana sistem tersebut tidak mengalami perubahan sepanjang waktu atau nilai perubahan. Pandang sistem persamaan diferensial [8]

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= f_1(x, y) \\ \frac{dy}{dt} &= f_2(x, y)\end{aligned}\tag{2.9}$$

Sebuah titik  $(x_0, y_0)$  yang merupakan titik kesetimbangan dari persamaan (2.9) jika memenuhi  $f_1(x_0, y_0) = 0$  dan  $f_2(x_0, y_0) = 0$ . Karena turunan suatu konstanta sama dengan nol, maka sepasang fungsi konstan  $x(t) \equiv x_0$  dan  $y(t) \equiv y_0$  merupakan penyelesaian kesetimbangan dari persamaan (2.9) untuk semua  $t \geq 0$ .

Linearisasi sistem adalah metode yang lebih mudah untuk menentukan kestabilan suatu sistem dengan menyelidiki pengaruh perubahan kecil pada syarat awal. Jika titik  $(x_0, y_0)$  adalah titik kesetimbangan maka diselidiki pengaruh perubahan kecil pada titik kesetimbangan tersebut. Jika titik  $(x, y)$  merupakan titik di sekitar titik kesetimbangan maka secara matematis titik  $(x, y)$  dapat diekspresikan sebagai

$$(x, y) = (x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y).$$

Pendekatan fungsi  $f_1(x, y)$  dan  $f_2(x, y)$  dapat ditentukan dengan menggunakan ekspansi deret Taylor,

$$\begin{aligned}f_1(x, y) &\approx f_1(x_0, y_0) + \frac{\partial f_1(x_0, y_0)}{\partial x}(x - x_0) + \\ &\frac{\partial f_1(x_0, y_0)}{\partial y}(y - y_0) + \dots \\ f_2(x, y) &\approx f_2(x_0, y_0) + \frac{\partial f_2(x_0, y_0)}{\partial x}(x - x_0) + \\ &\frac{\partial f_2(x_0, y_0)}{\partial y}(y - y_0) + \dots\end{aligned}$$

Karena  $(x_0, y_0)$  adalah titik kesetimbangan maka  $f_1(x_0, y_0) = f_2(x_0, y_0) = 0$ . Oleh karena itu, sistem (2.9) dapat didekati sebagai sistem linear

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= \frac{\partial f_1(x_0, y_0)}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial f_1(x_0, y_0)}{\partial y} \Delta y \\ \frac{dy}{dt} &= \frac{\partial f_2(x_0, y_0)}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial f_2(x_0, y_0)}{\partial y} \Delta y\end{aligned}$$

Sistem linear di atas dapat disajikan dalam bentuk matriks

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix} \frac{dx}{dt} \\ \frac{dy}{dt} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(x_0, y_0)}{\partial x} & \frac{\partial f_1(x_0, y_0)}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2(x_0, y_0)}{\partial x} & \frac{\partial f_2(x_0, y_0)}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{bmatrix} \\ &= J(x) \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{bmatrix}\end{aligned}\quad (2.10)$$

dengan matriks  $J(x)$  pada persamaan (2.10) merupakan matriks Jacobian.

## 2.7 Kestabilan Asimtotis Lokal

Kestabilan asimtotis lokal merupakan kestabilan dari sistem linier atau kestabilan dari linierisasi sistem tak linier. Kestabilan lokal pada titik kesetimbangan ditentukan oleh tanda bagian real dari akar-akar karakteristik sistem dari matriks Jacobian yang dihitung di sekitar titik kesetimbangan. Untuk sistem tak linear harus dilinearkan sehingga didapatkan bentuk sistem linear.

### ***Teorema 2.4 [10]***

*Titik setimbang  $(\bar{x}_0, \bar{y}_0)$  stabil asimtotis jika dan hanya jika nilai karakteristik dari*

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x}(x_0, y_0) & \frac{\partial f_1}{\partial y}(x_0, y_0) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x}(x_0, y_0) & \frac{\partial f_2}{\partial y}(x_0, y_0) \end{bmatrix}$$

*Mempunyai tanda negatif pada bagian realnya dan tidak stabil jika sedikitnya satu dari nilai karakteristik mempunyai tanda positif pada bagian realnya.*

### **Definisi 2.5 [10]**

*Jika matriks  $J$  berukuran  $n \times n$  maka vektor tak nol dinamakan vektor karakteristik dari  $J$  jika memenuhi*

$$Jx = \lambda x$$

*untuk suatu skalar  $\lambda$ . Untuk suatu skalar  $\lambda$  disebut nilai karakteristik dari  $J$  dan  $x$  dikatakan vektor karakteristik yang bersesuaian dengan  $\lambda$ .*

Untuk mencari nilai karakteristik matriks  $J$  yang berukuran  $n \times n$ , maka dapat ditulis kembali persamaan  $Jx = \lambda x$  sebagai  $(J - \lambda I)x = 0$  dan mempunyai penyelesaian tak nol jika dan hanya jika  $|J - \lambda I| = 0$ .

Jika matriks  $J = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$  dan  $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$  maka persamaan  $Jx = \lambda x$  dapat ditulis sebagai berikut

$$\begin{vmatrix} a - \lambda & b \\ c & d - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

dan diperoleh nilai eigen sebagai berikut

$$\lambda^2 - \lambda(a + d) + (ad - bc) = 0 \quad (2.11)$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{(a + d) \pm \sqrt{(a + d)^2 - 4(ad - bc)}}{2} \quad (2.12)$$

Dalam hal ini  $\lambda_1 + \lambda_2 = \text{Tr}(J)$ ,  $\lambda_1 \cdot \lambda_2 = \det(J)$  dan  $\Delta = (\text{Tr}(J))^2 - 4 \det(J)$  sehingga persamaan (2.11) dapat dinyatakan sebagai

$$\lambda^2 - \text{Tr}(J)\lambda + \det(J) = 0 \quad (2.13)$$

dan selanjutnya diperoleh kriteria kestabilan titik titik kesetimbangan berdasarkan nilai eigen,  $\text{Tr}(J)$ ,  $\det(J)$  dan  $\Delta$  pada tabel 2.1.

Tabel 2.1 Kriteria Kestabilan Titik Kesetimbangan [10]

Nilai Eigen	Kriteria $\text{Tr}(J)$ , $\det(J)$ , dan $\Delta$	Nama	Kestabilan
$\lambda_1 > \lambda_2 > 0$ $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$ $\lambda_1 = \lambda_2 > 0$ $\lambda_1 = \lambda_2 < 0$	$\text{Tr}(J) > 0$ atau $\text{Tr}(J) < 0$ $\det(J) > 0$ $\Delta \geq 0$	simpul	Stabil asimtotis jika semua nilai eigen negatif, Tidak stabil jika semua nilai eigen positif.
$\lambda_1 > 0 > \lambda_2$ $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$	$\det(J) < 0$ $\Delta > 0$	sadel	Tidak stabil.
$\lambda_1 = a + ib$ $\lambda_2 = a - ib$	$\text{Tr}(J) > 0$ atau $\text{Tr}(J) < 0$ $\det(J) > 0$	spiral	Stabil asimtotis jika bagian real nilai eigen negatif, Tidak stabil jika bagian real nilai eigen positif.
$\lambda_1 = ib$ $\lambda_2 = -ib$	$\text{Tr}(J) = 0$ $\det(J) = 0$ $\Delta \leq 0$	pusat	Stabil.

## 2.8 Kriteria Kestabilan Routh-Hurwitz

Pada permasalahan tertentu kestabilan titik setimbang tidak bisa diamati karena tanda bagian real nilai eigen tidak mudah ditentukan, oleh karena itu perlu digunakan metode lain

untuk menentukan tanda bagian real nilai eigen  $\lambda$ . Sebagai contoh untuk matriks yang berukuran  $n \times n$  dengan  $n > 2$  tanda bagian real nilai eigen dapat ditentukan dengan menggunakan kriteria kestabilan Routh-Hurwitz (*Routh-Hurwitz Stability Criterion*) [11]. Nilai eigen dari  $A$  adalah akar polinomial karakteristik

$$\det(\lambda I - A) = a_0 \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \dots + a_n \lambda^0$$

Prosedur dan kriteria Routh-Hurwitz adalah sebagai berikut:

1. Menuliskan polinomial dalam  $\lambda$  sesuai dengan bentuk berikut:  

$$q(\lambda) = a_0 \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \dots + a_{n-1} \lambda + a_n = 0 \quad (2.14)$$
 dimana koefisien-koefisien tersebut konstanta real.
2. Jika ada koefisien-koefisien bernilai nol atau negatif dimana paling tidak terdapat satu koefisien bernilai positif maka terdapat satu atau lebih akar kompleks yang mempunyai bagian real positif, oleh karena itu sistem tidak stabil. Agar diperoleh akar yang mempunyai bagian real negatif, maka semua koefisiennya harus positif. Kondisi semua koefisien bernilai positif belum cukup untuk menjamin kestabilan.
3. Jika semua koefisien bernilai positif, susun koefisien polinomial tersebut menjadi

$\lambda^n$	$a_0$	$a_2$	$a_4$	$a_6$
$\lambda^{n-1}$	$a_1$	$a_3$	$a_5$	$a_7$
$\lambda^{n-2}$	$b_1$	$b_2$	$b_3$	$b_4$
$\lambda^{n-3}$	$c_1$	$c_2$	$c_3$	$c_4$
$\lambda^{n-4}$	$d_1$	$d_2$	$d_3$	$d_4$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\lambda^0$	$q$			

Koefisien-koefisien  $b_1, b_2, b_3$  dan seterusnya dihitung sebagai berikut:

$$b_1 = \frac{a_1 a_2 - a_0 a_3}{a_1}; \quad b_2 = \frac{a_1 a_4 - a_0 a_5}{a_1};$$

$$b_3 = \frac{a_1 a_6 - a_0 a_7}{a_1}; \quad \dots$$

Perhitungan koefisien  $b_i$  dilanjutkan sampai nilai  $b_i = 0$ , untuk semua  $i = 1, 2, 3, \dots$ . Pola yang sama dari perkalian silang koefisien-koefisien, dan baris di atasnya digunakan dalam menghitung koefisien  $c_i, d_i$  dan seterusnya. Sehingga,

$$c_1 = \frac{b_1 a_3 - a_1 b_2}{b_1}; \quad c_2 = \frac{b_1 a_5 - a_1 b_3}{b_1};$$

$$b_3 = \frac{b_1 a_7 - a_1 b_4}{b_1}; \quad \dots$$

$$d_1 = \frac{c_1 b_2 - b_1 c_2}{c_1}; \quad d_2 = \frac{c_1 b_3 - b_1 c_3}{c_1};$$

$$d_3 = \frac{c_1 b_4 - b_1 c_4}{c_1}; \quad \dots$$

Kriteria kestabilan Routh-Hurwitz menyatakan bahwa sistem dikatakan stabil syarat perlu dan semua akar-akar persamaan (2.14) mempunyai bilangan real negatif jika dan hanya jika elemen-elemen pada kolom pertama  $(a_0, a_1, b_1, c_1, \dots)$  memiliki tanda yang sama.

## 2.9 Bifurkasi Hopf

Diberikan sebuah sistem [12]

$$\dot{x} = f_\mu(x), \quad x \in \mathbb{R}^n, \mu \in \mathbb{R}^1 \quad (2.15)$$

dengan titik kesetimbangan  $(x_0, y_0)$ , dan asumsikan bahwa

- (a) Matriks Jacobian  $D_x f_{\mu 0}(x_0)$  mempunyai sepasang nilai eigen imajiner dan nilai eigen lainnya bernilai real negatif atau positif. Sehingga terdapat sebuah kurva kesetimbangan



$\{x(\mu), \mu\}$  dengan  $x(\mu_0) = x_0$  dan nilai eigen nya  $\lambda(\mu), \bar{\lambda}(\mu)$  dari matriks Jacobian  $J(\mu) = D_x f_{\mu_0}(x_0)$  adalah imajiner murni pada  $\mu = \mu_0$

- (b) Berlaku  $\frac{d(Re\lambda(\mu_0))}{d\mu} \neq 0$  sehingga terdapat sebuah bifurkasi Hopf sederhana superkritikal, subkritikal, atau turun tergantung pada orde yang lebih tinggi dalam sistem (2.15).

Dinotasikan polynomial karakteristik dari matriks Jacobi  
 $p(\lambda; \mu) = \det(\lambda I_n - J(\mu)) = p_0(\mu) + p_1(\mu) + \dots + p_n(\mu)\lambda^n$   
 (2.16)

dimana setiap  $p_i(\mu)$  adalah fungsi dari  $\mu$ ,  $p_n(\mu) = 1$ , dan  $p_0(\mu) > 0$  karena tidak terdapat akar real non-negatif.

Misalkan

$$L_n(\mu) = \begin{pmatrix} p_1(\mu) & p_0(\mu) & \cdots & 0 \\ p_3(\mu) & p_2(\mu) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{2n-1}(\mu) & p_{2n-2}(\mu) & \cdots & p_n(\mu) \end{pmatrix}$$

dengan  $p_i(\mu) = 0$  jika  $i < 0$  atau  $i > n$ . Menurut [13], kriteria Routh-Hurwitz dapat dinyatakan bahwa ketika  $p_0(\mu) > 0$ , polynomial  $p(\lambda; \mu)$  dari  $\lambda$  mempunyai akar-akar dengan bagian real negatif jika dan hanya jika subdeterminan utama  $n$  dari  $L_n(\mu)$  adalah positif :

$$D_1(\mu) = \det(L_1(\mu)) = p_1(\mu) > 0$$

$$D_2(\mu) = \det(L_2(\mu)) = \det \begin{pmatrix} p_1(\mu) & p_0(\mu) \\ p_3(\mu) & p_2(\mu) \end{pmatrix} > 0,$$

...

$$D_n(\mu) = \det(L_n(\mu)) > 0.$$

Sejak  $D_n(\mu) = p_n(\mu)D_{n-1}(\mu)$  dan dalam kasus  $p_n(\mu) = 1$ , kondisi Routh-Hurwitz dapat diungkapkan sebagai  
 $p_0 > 0, D_1 > 0, D_2 > 0, \dots, D_{n-1} > 0$  (2.17)

**Teorema 2.6 [12]** Diasumsikan bahwa terdapat kurva kesetimbangan  $\{x(\mu), \mu\}$  dengan  $x(\mu_0) = x_0$  untuk sistem (2.15). Kondisi (a) dan (b) pada hal 17, untuk bifurkasi Hopf sederhana setara dengan kondisi berikut pada koefisien polinomial karakteristik  $p(\lambda; \mu)$  :

- (1)  $p_0(\mu) > 0, D_1(\mu_0) > 0, \dots, D_{n-2}(\mu_0) > 0, D_{n-1}(\mu_0) > 0$
- (2)  $\frac{dD_{n-1}(\mu_0)}{d\mu} \neq 0$ .

Untuk sistem dimensi 3, kriterianya adalah

1.  $p_0(\mu_0) > 0, D_1(\mu_0) = p_1(\mu_0) > 0, D_2(\mu_0) = p_1(\mu_0)p_2(\mu_0) - p_0(\mu_0) = 0$
2.  $\frac{dD_2(\mu_0)}{d\mu} \neq 0$ .

## 2.10 Metode Numerik Runge-Kutta Orde 4

Metode Runge-Kutta merupakan pengembangan dari metode Euler, dimana perhitungan penyelesaian dilakukan langkah demi langkah [8]. Untuk fungsi dari persamaan differensial

$$\dot{y} = f(x, y) \quad (2.18)$$

dan titik pendekatan awal  $x_0, y_0$ , dengan metode Euler diperoleh nilai fungsi penyelesaian dari persamaan (2.18) sebagai berikut

$$y_{n+1} = y_n + hf \quad (2.19)$$

Selanjutnya dengan metode Runge-Kutta orde 4 digunakan empat nilai koefisien perbaikan yaitu  $k_1, k_2, k_3$ , dan  $k_4$  pada fungsi penyelesaian persamaan (2.19) sehingga nilai fungsi penyelesaian dari persamaan differensial (2.18) menjadi

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \quad (2.20)$$

dengan

$$k_1 = hf(x_n, y_n)$$

$$\begin{aligned}
k_2 &= hf\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_1}{2}\right) \\
k_3 &= hf\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_2}{2}\right) \\
k_4 &= hf(x_n + h, y_n + k_3)
\end{aligned} \tag{2.21}$$

*“ Halaman ini sengaja dikosongkan “*

## **BAB III**

### **METODE PENELITIAN**

Bab ini menguraikan metode yang digunakan dalam penelitian secara rinci. Metodologi penelitian yang digunakan berguna sebagai acuan sehingga penelitian dapat berjalan sistematis.

#### **3.1 Studi Literatur**

Tahap ini merupakan tahap untuk melakukan identifikasi permasalahan, yaitu mencari referensi yang menunjang penelitian. Referensi bisa berupa Tugas Akhir, jurnal, buku, maupun artikel terkait.

#### **3.2 Tahap Mengkaji Model**

Pada tahap ini merupakan tahap untuk memahami model eko-epidemiologi dengan populasi *Susceptible*, *Infected* dan predator.

#### **3.3 Tahap Menentukan Titik Keseimbangan**

##### **3.3.1 Menentukan Titik Keseimbangan Trivial**

Pada tahap ini dibentuk model eko-epidemiologi dalam keadaan setimbang ketika laju populasi masing-masing adalah nol. Selanjutnya dari model tersebut dicari titik kesetimbangannya dengan  $s = i = p = 0$ .

##### **3.3.1.1 Menganalisis Kestabilan Titik Keseimbangan Trivial**

Pada tahap ini akan dianalisis stabil atau tidaknya titik kesetimbangan trivial dengan menggunakan nilai eigen.

##### **3.3.2 Menentukan Titik Keseimbangan Bebas Penyakit**

Pada tahap ini dibentuk model eko-epidemiologi dalam keadaan setimbang ketika laju populasi masing-masing adalah nol. Selanjutnya dari model tersebut dicari titik kesetimbangan ketika tidak ada penyebaran penyakit yaitu  $i = 0$ .

### **3.3.2.1 Menganalisis Kestabilan Titik Keseimbangan Bebas Penyakit**

Pada tahap ini akan dianalisis stabil atau tidaknya titik keseimbangan bebas penyakit dengan menggunakan nilai eigen.

### **3.3.3 Menentukan Titik Keseimbangan Bebas Predator**

Pada tahap ini dibentuk model eko-epidemiologi dalam keadaan setimbang ketika laju populasi masing-masing adalah nol. Selanjutnya dari model tersebut dicari titik kesetimbangannya ketika  $p = \bar{p} = 0$ .

#### **3.3.3.1 Menganalisis Kestabilan Titik Keseimbangan Bebas Predator**

Pada tahap ini akan dianalisis stabil atau tidaknya titik keseimbangan bebas predator dengan menggunakan nilai eigen.

### **3.3.4 Menentukan Titik Keseimbangan Planar**

Pada tahap ini dibentuk model eko-epidemiologi dalam keadaan setimbang ketika laju populasi masing-masing adalah nol. Selanjutnya dari model tersebut dicari titik kesetimbangannya ketika  $\bar{i} = 0$ .

#### **3.3.4.1 Menganalisis Kestabilan Titik Keseimbangan Planar**

Pada tahap ini akan dianalisis stabil atau tidaknya titik keseimbangan planar dengan menggunakan nilai eigen.

### **3.3.5 Menentukan Titik Keseimbangan Non Trivial**

Pada tahap ini dibentuk model eko-epidemiologi dalam keadaan setimbang ketika laju populasi masing-masing adalah nol. Selanjutnya dari model tersebut dicari titik kesetimbangannya dengan  $s^*, i^*, p^* \neq 0$ .

#### **3.3.5.1 Menganalisis Kestabilan Titik Keseimbangan Non Trivial**

Pada tahap ini akan dianalisis stabil atau tidaknya titik kesetimbangan non trivial dengan menggunakan nilai eigen.

### **3.4 Menentukan Eksistensi Bifurkasi Hopf**

Pada tahap ini dilakukan analisis titik tetap yang mempunyai sepasang nilai eigen imajiner dan nilai eigen lainnya bernilai real negatif atau positif, yaitu dengan mencari parameter yang memenuhi syarat terjadinya bifurkasi Hopf.

### **3.5 Membuat Simulasi**

Pada tahap ini dilakukan penyelesaian numerik dengan metode numerik Runge-Kutta orde 4 menggunakan *software* MATLAB.

### **3.6 Kesimpulan dan Saran**

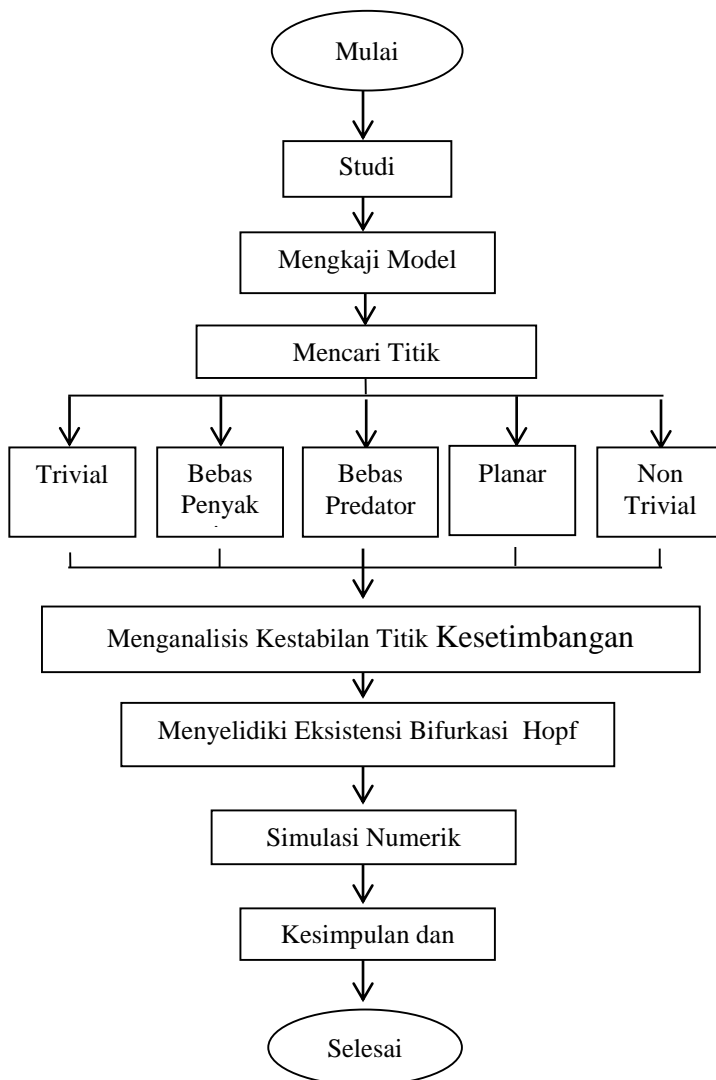
Pada tahap terakhir ini dilakukan penarikan simpulan dari hasil pembahasan sebelumnya. Selanjutnya diberikan saran untuk perbaikan pada penelitian berikutnya.

### **3.7 Penyusunan Laporan Hasil Penelitian**

Pada tahap ini dilakukan penyusunan laporan berdasarkan hasil analisis dan penelitian.

### **3.8 Diagram Alir**

Pada Tahap ini disusun diagram alir pada Gambar 3.1 sebagai langkah-langkah yang dilakukan untuk mencapai tujuan dari penelitian.



Gambar 3.1 Diagram Alir Penelitian



## BAB IV

### ANALISIS DAN PEMBAHASAN

Bab ini dibahas mengenai titik kesetimbangan dan kestabilan lokal dari setiap titik kesetimbangan, serta analisis bifurkasi Hopf dari model eko-epidemiologi. Selanjutnya akan ditentukan penyelesaian solusi numerik dari model dan mensimulasikan dengan menggunakan MATLAB.

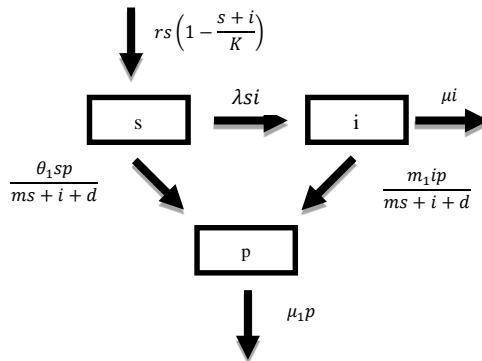
#### 4.1 Model Eko-Epidemiologi dengan Respon Fungsional Holling Tipe II

Pada model eko-epidemiologi dengan respon fungsional Holling tipe II disusun asumsi-asumsi sebagai berikut :

- a. Populasi dibagi menjadi 3 bagian, yaitu :
  - $s$  adalah populasi *Susceptible* (populasi prey yang rentan terhadap penyakit) pada saat  $t$ .
  - $i$  adalah populasi *Infected* (populasi prey yang terinfeksi terhadap penyakit) pada saat  $t$ .
  - $p$  adalah populasi predator pada saat  $t$ .
- b. Kepadatan populasi prey dinotasikan sebagai  $n(t)$  dan kepadatan populasi predator dinotasikan sebagai  $p(t)$  pada saat  $t > 0$  dengan  $n(t) = s(t) + i(t)$ .
- c.  $rs \left(1 - \frac{s+i}{K}\right)$  adalah jumlah populasi prey rentan yang tumbuh secara logistik dengan rata-rata pertumbuhan intrinsik konstan ( $r$ ) dan daya dukung lingkungan ( $K$ ).
- d.  $\lambda si$  adalah laju munculnya infeksi baru dengan  $\lambda$  adalah peluang terjadinya penularan penyakit saat terjadi interaksi

antara populasi *Susceptible* dan *Infected* dengan  $\lambda$  sebanding dengan kepadatan populasi.

- e. Populasi prey rentan ( $s$ ) bertambah secara logistik dan populasi prey terinfeksi ( $i$ ) mati sebelum bereproduksi.
- f. Predator tidak dapat membedakan prey yang rentan dan yang terinfeksi sehingga predator mengkonsumsi spesies prey yang rentan maupun yang terinfeksi sesuai dengan respon fungsional Holling tipe II.



Gambar 4.1 Diagram Kompartemen Model Eko-Epidemiologi dengan Respon Fungsional Holling Tipe II

Berdasarkan Diagram Kompartemen pada Gambar 4.1 diperoleh model eko-epidemiologi sebagai berikut :

1. Besarnya laju pertumbuhan populasi prey yang rentan terhadap penyakit (*Susceptible*) akan bertambah secara logistik dengan rata-rata pertumbuhan intrinsik  $r$  konstan dan tumbuh secara maksimal sesuai daya dukung lingkungan  $K$ , sedangkan laju populasi *Susceptible* akan menurun dengan adanya kejadian penularan penyakit  $\lambda si$

dan predasi oleh populasi predator  $\frac{\theta_1 sp}{ms+i+d}$ . Sehingga

persamaan untuk populasi  $s$  adalah

$$\frac{ds}{dt} = rs \left(1 - \frac{s+i}{K}\right) - \lambda si - \frac{\theta_1 sp}{ms+i+d}$$

2. Besarnya laju populasi prey yang terinfeksi terhadap penyakit (*Infected*) akan bertambah dengan adanya kejadian penularan penyakit  $\lambda si$ . Laju populasi *Infected* akan menurun dengan adanya kematian  $\mu i$  dan predasi oleh populasi predator  $\frac{m_1 ip}{ms+i+d}$ . Sehingga persamaan untuk populasi  $i$  adalah

$$\frac{di}{dt} = \lambda si - \frac{m_1 ip}{ms+i+d} - \mu i$$

3. Besarnya laju populasi predator akan bertambah dengan adanya konversi populasi prey yang rentan dan prey yang terinfeksi serta laju populasi predator akan menurun karena kematian  $\mu_1$ . Sehingga persamaan untuk populasi  $p$  adalah

$$\frac{dp}{dt} = \frac{\theta_2 sp}{ms+i+d} + \frac{m_2 ip}{ms+i+d} - \mu_1 p$$

Dari penjelasan di atas maka persamaan model eko-epidemiologi dapat ditulis sebagai berikut

$$\frac{ds}{dt} = rs \left(1 - \frac{s+i}{K}\right) - \lambda si - \frac{\theta_1 sp}{ms+i+d} \quad (4.1)$$

$$\frac{di}{dt} = \lambda si - \frac{m_1 ip}{ms+i+d} - \mu i \quad (4.2)$$

$$\frac{dp}{dt} = \frac{\theta_2 sp}{ms+i+d} + \frac{m_2 ip}{ms+i+d} - \mu_1 p \quad (4.3)$$

dengan kondisi awal  $s(0) = s_0 > 0, i(0) = i_0 > 0$  dan  $p(0) = p_0 > 0$ .

## 4.2 Daerah Penyelesaian

Teorema 1. Jika kondisi  $\frac{m_1}{m_2} \geq \frac{\theta_1}{\theta_2}$  maka sistem disipatif.

Untuk menunjukkan kebenaran biologis dari model eko-epidemiologi adalah dengan membuktikan keterbatasan penyelesaian dan kedisipatifan sistem dari teorema 1.

Sehingga akan dibuktikan jika  $\frac{m_1}{m_2} \geq \frac{\theta_1}{\theta_2}$  maka sistem disipatif. Misalkan  $W(t) = s(t) + i(t) + \frac{\theta_1}{\theta_2}p(t)$  maka

$$\begin{aligned} \frac{dW}{dt} &= \frac{ds}{dt} + \frac{di}{dt} + \frac{\theta_1}{\theta_2} \frac{dp}{dt} \\ &= rs \left( 1 - \frac{s+i}{K} \right) - \lambda si - \frac{\theta_1 sp}{ms+i+d} + \lambda si \\ &\quad - \frac{m_1 ip}{ms+i+d} - \mu i \\ &\quad + \frac{\theta_1}{\theta_2} \left( \frac{\theta_2 sp}{ms+i+d} + \frac{m_2 ip}{ms+i+d} - \mu_1 p \right) \\ &= rs \left( 1 - \frac{s+i}{K} \right) - \frac{\theta_1 sp}{ms+i+d} \\ &\quad - \frac{m_1 ip}{ms+i+d} + \frac{\theta_1}{\theta_2} \left( \frac{\theta_2 sp}{ms+i+d} + \frac{m_2 ip}{ms+i+d} \right) \\ &\quad - \mu i - \frac{\theta_1}{\theta_2} \mu_1 p \end{aligned}$$

Untuk setiap  $\eta > 0$ , ditentukan

$$\begin{aligned} \frac{dW}{dt} &= rs \left( 1 - \frac{s+i}{K} \right) - \frac{\theta_1 sp}{ms+i+d} \\ &\quad - \frac{m_1 ip}{ms+i+d} + \frac{\theta_1}{\theta_2} \left( \frac{\theta_2 sp}{ms+i+d} + \frac{m_2 ip}{ms+i+d} \right) \\ &\quad - \min(\mu, \mu_1) \left( i + \frac{\theta_1}{\theta_2} p \right) \\ \frac{dW}{dt} &= rs \left( 1 - \frac{s+i}{K} \right) - \frac{\theta_1 sp}{ms+i+d} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{m_1 ip}{ms+i+d} + \frac{\theta_1}{\theta_2} \left( \frac{\theta_2 sp}{ms+i+d} + \frac{m_2 ip}{ms+i+d} \right) \\
& - \eta \left( i + \frac{\theta_1}{\theta_2} p \right) \\
& \frac{dW}{dt} + \eta W \\
& = s\eta + rs \left( 1 - \frac{s}{K} \right) - \frac{rsi}{K} - \frac{m_1 ip}{ms+i+d} + \frac{\theta_1}{\theta_2} \frac{m_2 ip}{ms+i+d} \\
& = s \left( \eta + r \left( 1 - \frac{s}{K} \right) \right) - \frac{rsi}{K} - \left( m_1 + \frac{\theta_1}{\theta_2} m_2 \right) \frac{ip}{ms+i+d} \\
& \quad \text{Karena } \frac{m_1}{m_2} \geq \frac{\theta_1}{\theta_2} \text{ maka } - \left( m_1 + \frac{\theta_1}{\theta_2} m_2 \right) \frac{ip}{ms+i+d} \leq 0 \text{ dan} \\
& -\frac{rsi}{K} \leq 0 \text{ sehingga}
\end{aligned}$$

$$\frac{dW}{dt} + \eta W \leq s \left( \eta + r \left( 1 - \frac{s}{K} \right) \right) \quad (4.3)$$

$$\begin{aligned}
& \frac{dW}{dt} + \eta W \leq s(\eta + r) - \frac{rs^2}{K} \\
& \frac{dW}{dt} + \eta W \leq -\frac{r}{K} \left( s^2 - \frac{K(\eta + r)}{r} s \right) \\
& \frac{dW}{dt} + \eta W \\
& \leq -\frac{r}{K} \left( s^2 - \frac{2K(\eta + r)}{2r} s + \frac{K^2(\eta + r)^2}{4r^2} - \frac{K^2(\eta + r)^2}{4r^2} \right) \\
& \frac{dW}{dt} + \eta \leq -\frac{r}{K} \left( s - \frac{2K(\eta + r)}{2r} \right)^2 + \frac{K(\eta + r)^2}{4r} \quad (4.4)
\end{aligned}$$

Karena  $\left( s - \frac{2K(\eta + r)}{2r} \right) > 0$  dan  $-\frac{r}{K} \left( s - \frac{2K(\eta + r)}{2r} \right)^2 \leq 0$  sehingga  $-\frac{r}{K} \left( s - \frac{2K(\eta + r)}{2r} \right)^2 + \frac{K(\eta + r)^2}{4r} \leq \frac{K(\eta + r)^2}{4r}$ . Maka persamaan (4.4) menjadi

$$\frac{dW}{dt} + \eta W \leq \frac{K(\eta + r)^2}{4r} \quad (4.5)$$

Misalkan  $\eta < \min(\mu, \mu_1)$  dan  $\frac{K(\eta+r)^2}{4r} = \phi$ , maka  $\frac{K(\eta+r)^2}{4r} > 0$  sehingga  $\frac{dW}{dt} + \eta W \leq \phi$ .

Diketahui bahwa  $\frac{dW}{dt} + \eta W \leq \phi$  memiliki 2 penyelesaian yaitu pada saat  $\frac{dW}{dt} + \eta W = 0$  dan  $\frac{dW}{dt} + \eta W = \phi$  sehingga dengan menggunakan Persamaan Differensial Biasa maka

$$\frac{dW}{dt} + \eta W = 0$$

Misal  $W = e^{kt}$  maka

$$\frac{de^{kt}}{dt} + \eta e^{kt} = 0$$

$$ke^{kt} + \eta e^{kt} = 0$$

$$(k + \eta) e^{kt} = 0$$

Karena  $e^{kt} \neq 0$  maka

$$(k + \eta) = 0$$

$$k = -\eta$$

sehingga,

$$W(t_1) = C_1 e^{-\eta t}$$

Selanjutnya

$$\frac{dW}{dt} + \eta W = \phi$$

Misal  $W = l$  dimana  $l > 0$  merupakan konstanta, sehingga

$$\frac{dl}{dt} + \eta l = \phi$$

$$0 + \eta l = \phi$$

$$l = \frac{\phi}{\eta} \text{ maka } W(t_2) = l \text{ sehingga diperoleh}$$

$$W(t) = C_1 e^{-\eta t} + \frac{\phi}{\eta} \quad (4.7)$$

Misal  $t = 0$  maka

$$\begin{aligned} W(0) &= C_1 + \frac{\phi}{\eta} \\ C_1 &= W(0) - \frac{\phi}{\eta} \end{aligned} \quad (4.8)$$

Selanjutnya mensubstitusikan Persamaan (4.8) ke Persamaan (4.7) sehingga Persamaan menjadi

$$\begin{aligned} W(t) &= \left( W(0) - \frac{\phi}{\eta} \right) e^{-\eta t} + \frac{\phi}{\eta} \\ W(t) &= W(0) e^{-\eta t} - \frac{\phi}{\eta} e^{-\eta t} + \frac{\phi}{\eta} \\ W(t) &= W(0) e^{-\eta t} + \frac{\phi}{\eta} \left( 1 - e^{-\eta t} \right) \\ W(t) &\leq W(0) e^{-\eta t} + \frac{\phi}{\eta} \left( 1 - e^{-\eta t} \right) \leq \max \left( W(0), \frac{\phi}{\eta} \right) \end{aligned} \quad (4.9)$$

Selanjutnya, jika  $\limsup_{t \rightarrow \infty} W(t) \leq \frac{\phi}{\eta} = M$  maka

$W(t) = s(t) + i(t) + \frac{\theta_1}{\theta_2} p(t) \leq M$  dan semua spesies terbatas seragam untuk nilai awal di  $R_+^3$ . Untuk sistem (4.1), (4.2), dan (4.3) harus disipatif yaitu semua populasi yang memulai di  $R_+^3$  adalah terbatas seragam dalam waktu oleh lingkungannya. Dengan menggunakan teorema 1, diasumsikan bahwa terdapat  $(\eta_1, \eta_2, \eta_3) > 0$  sehingga  $\Omega(s_0, i_0, p_0) \subset R_+^3 = \{(s, i, p): 0 < s \leq \eta_1; 0 < i \leq \eta_2; 0 < p \leq \eta_3\}$  untuk semua  $(s_0, i_0, p_0) > 0$  dimana  $\Omega(s_0, i_0, p_0)$  adalah batas omega yang mengatur mulainya orbit di  $(s_0, i_0, p_0)$ . Maka terbukti bahwa sistem disipatif.

### 4.3 Titik Kestimbangan Trivial

Titik kesetimbangan adalah titik yang diperoleh ketika model eko-epidemiologi pada sistem Persamaan (4.1), (4.2), dan (4.3) berada pada keadaan setimbang dimana jumlah populasi *Susceptible*, *Infected*, dan *Predator* tidak mengalami perubahan (tidak bertambah atau tidak berkurang) sehingga laju populasinya sepanjang waktu adalah nol.

$$\frac{ds}{dt} = 0, \frac{di}{dt} = 0, \frac{dp}{dt} = 0.$$

Dari Persamaan (4.1), (4.2) dan (4.3) pada saat setimbang diperoleh

$$\begin{aligned} \lambda si - \frac{m_1 ip}{ms + i + d} - \mu i &= 0 \\ \lambda si(ms + i + d) - m_1 ip - \mu i(ms + i + d) &= 0 \\ (\lambda s - \mu)i^2 + (\lambda s^2 m + \lambda s + \lambda sd - m_1 p - \mu ms - \mu d)i &= 0 \\ i((\lambda s - \mu)i - (m_1 p + \mu ms + \mu d - \lambda s^2 m - \lambda s + \lambda sd)) &= 0 \\ \text{sehingga didapat } i_0 = 0 &\text{ atau} \\ i_0 = \frac{m_1 p + \mu ms + \mu d - \lambda s^2 m - \lambda sd}{\lambda s - \mu} &\quad (4.10) \end{aligned}$$

Dari persamaan (4.10) disubstitusikan ke dalam Persamaan (4.3)

$$\begin{aligned} \frac{\theta_2 sp}{ms + (0) + d} - \frac{m_2(0)p}{ms + (0) + d} - \mu_1 p &= 0 \\ \frac{\theta_2 sp}{ms + d} - \mu_1 p &= 0 \\ \frac{\theta_2 sp - \mu_1 pms - \mu_1 pd}{ms + d} &= 0 \\ p(\theta_2 s - \mu_1 ms - \mu_1 d) &= 0 \\ \text{sehingga didapat } p = 0 &\text{ dan } (\theta_2 s - \mu_1 ms - \mu_1 d) \neq 0 \quad (4.11) \end{aligned}$$

Langkah selanjutnya dari persamaan (4.10) dan (4.11) disubstitusikan pada Persamaan (4.1).

$$rs \left( 1 - \frac{s + (0)}{K} \right) - \lambda s(0) - \frac{\theta_1 s(0)}{ms + d + (0)} = 0$$



$$rs \left(1 - \frac{s}{K}\right) = 0$$

$$rs \left(\frac{K-s}{K}\right) = 0$$

$$\frac{Krs - rs^2}{K} = 0$$

$$Krs - rs^2 = 0$$

$$s(Kr - rs) = 0, Kr - rs \neq 0$$

maka didapat  $s = 0$ .

Sehingga diperoleh titik kesetimbangan yaitu titik kesetimbangan trivial  $E_0(0,0,0)$ .

#### 4.4 Analisis Kestabilan Titik Kesetimbangan Trivial

Untuk mendapatkan matriks Jacobian dari model eko-epidemiologi yang merupakan Persamaan tak linier, diperlukan pelinieran terlebih dahulu dengan menggunakan ekspansi deret Taylor, sistem persamaan (4.1), (4.2), dan (4.3) dapat ditulis sebagai berikut :

$$\begin{aligned} f_1(s_0, i_0, p_0) &= rs \left(1 - \frac{s+i}{K}\right) - \lambda si - \frac{\theta_1 sp}{ms + i + d} \\ f_2(s_0, i_0, p_0) &= \lambda si - \frac{m_1 ip}{ms + i + d} - \mu i \\ f_3(s_0, i_0, p_0) &= \frac{\theta_2 sp}{ms + i + d} + \frac{m_2 ip}{ms + i + d} - \mu_1 p \end{aligned} \quad (4.12)$$

Pendekatan linear dilakukan di sekitar titik setimbang trivial  $(s_0, i_0, p_0)$ , sehingga ekspansi deret Taylor dari sistem (4.12) adalah sebagai berikut :

$$\begin{aligned} \frac{ds}{dt} &= f_1(s_0, i_0, p_0) + (s - s_0) \frac{\partial f_1}{\partial s} + (i - i_0) \frac{\partial f_1}{\partial i} + (p - p_0) \frac{\partial f_1}{\partial p} \\ &+ \dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{di}{dt} &= f_2(s_0, i_0, p_0) + (s - s_0) \frac{\partial f_2}{\partial s} + (i - i_0) \frac{\partial f_2}{\partial i} + (p - p_0) \frac{\partial f_2}{\partial p} \\
&\quad + \dots \\
\frac{dp}{dt} &= f_3(s_0, i_0, p_0) + (s - s_0) \frac{\partial f_3}{\partial s} + (i - i_0) \frac{\partial f_3}{\partial i} + (p - p_0) \frac{\partial f_3}{\partial p} \\
&\quad + \dots
\end{aligned}$$

dengan

$$f_1(s_0, i_0, p_0) = 0$$

$$f_2(s_0, i_0, p_0) = 0$$

$$f_3(s_0, i_0, p_0) = 0$$

selanjutnya didefinisikan

$$s - s_0 = a, \quad i - i_0 = b, \quad p - p_0 = c$$

sehingga suku-suku linear ekspansi deret Taylor adalah

$$\frac{ds}{dt} = a \frac{\partial f_1}{\partial s} + b \frac{\partial f_1}{\partial i} + c \frac{\partial f_1}{\partial p}$$

$$\frac{di}{dt} = a \frac{\partial f_2}{\partial s} + b \frac{\partial f_2}{\partial i} + c \frac{\partial f_2}{\partial p}$$

$$\frac{dp}{dt} = a \frac{\partial f_3}{\partial s} + b \frac{\partial f_3}{\partial i} + c \frac{\partial f_3}{\partial p}$$

Persamaan di atas dapat ditulis dalam bentuk matriks sebagai berikut

$$\begin{bmatrix} \frac{ds}{dt} \\ \frac{di}{dt} \\ \frac{dp}{dt} \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial s} & \frac{\partial f_1}{\partial i} & \frac{\partial f_1}{\partial p} \\ \frac{\partial f_2}{\partial s} & \frac{\partial f_2}{\partial i} & \frac{\partial f_2}{\partial p} \\ \frac{\partial f_3}{\partial s} & \frac{\partial f_3}{\partial i} & \frac{\partial f_3}{\partial p} \end{pmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$$

dan matriks Jacobian dari matriks di atas adalah

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial s} & \frac{\partial f_1}{\partial i} & \frac{\partial f_1}{\partial p} \\ \frac{\partial f_2}{\partial s} & \frac{\partial f_2}{\partial i} & \frac{\partial f_2}{\partial p} \\ \frac{\partial f_3}{\partial s} & \frac{\partial f_3}{\partial i} & \frac{\partial f_3}{\partial p} \end{pmatrix} \quad (4.13)$$

dengan

$$\frac{\partial f_1}{\partial s} = r - \frac{2rs}{K} - \frac{ri}{K} - \lambda i - \frac{\theta_1 p(i+d)}{(ms+d+i)^2}$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial i} = -\frac{rs}{K} - \lambda s - \frac{\theta_1 sp}{(ms+d+i)^2}$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial p} = -\frac{\theta_1 s}{ms+d+i}$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial s} = \lambda i + \frac{m_1 ipm}{(ms+i+d)^2}$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial i} = \lambda s - \frac{m_1 p(ms+d)}{(ms+i+d)^2} - \mu$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial p} = -\frac{m_1 i}{ms+i+d}$$

$$\frac{\partial f_3}{\partial s} = \frac{\theta_2 p(i+d)}{ms+i+d} - \frac{m_2 ipm}{(ms+i+d)^2}$$

$$\frac{\partial f_3}{\partial i} = -\frac{\theta_2 sp}{(ms+i+d)^2} - \frac{m_2 p(ms+d)}{(ms+i+d)^2}$$

$$\frac{\partial f_3}{\partial p} = \frac{\theta_2 s}{ms+i+d} + \frac{m_2 i}{ms+i+d} - \mu_1$$

Substitusikan titik kesetimbangan  $E_0(0,0,0)$  pada matriks Jacobian (4.6) didapat

$$J(E_0) = \begin{pmatrix} r & 0 & 0 \\ 0 & -\mu & 0 \\ 0 & 0 & -\mu_1 \end{pmatrix} \quad (4.14)$$

Selanjutnya dicari Persamaan karakteristik dari matriks Jacobian tersebut dengan menghitung  $|J - \lambda I| = 0$ , berikut perhitungannya

$$\begin{aligned}
|J - \lambda I| &= 0 \\
\left| \begin{bmatrix} r & 0 & 0 \\ 0 & -\mu & 0 \\ 0 & 0 & -\mu_1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix} \right| &= 0 \\
\begin{vmatrix} r - \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & -\mu - \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & -\mu_1 - \lambda_3 \end{vmatrix} &= 0 \\
(r - \lambda_1)(-\mu - \lambda_2)(-\mu_1 - \lambda_3) - 0 + 0 &= 0 \\
(r - \lambda_1)(-\mu - \lambda_2)(-\mu_1 - \lambda_3) &= 0
\end{aligned} \tag{4.15}$$

Sehingga diperoleh nilai eigen dari titik kesetimbangan  $E_0$  adalah sebagai berikut

$$\lambda_{1E_0} = r > 0, \quad \lambda_{2E_0} = -\mu < 0, \quad \lambda_{3E_0} = -\mu_1 < 0$$

Berdasarkan nilai eigen yang diperoleh pada perhitungan (4.15)  $\lambda_1 > 0$ ,  $\lambda_2 < 0$ , dan  $\lambda_3 < 0$ , maka kestabilan pada titik kesetimbangan  $E_0$  adalah tidak stabil (*saddle*).

#### 4.5 Kestabilan Titik Kesetimbangan Bebas Penyakit

Dengan menggunakan perhitungan pada titik kesetimbangan  $E_0(0,0,0)$  didapat  $i = 0$  dan  $p = 0$ , maka  $i = 0$  dan  $p = 0$  disubstitusikan pada Persamaan (4.1) sehingga diperoleh sebagai berikut

$$\begin{aligned}
rs \left( 1 - \frac{s + (0)}{K} \right) - \lambda s(0) - \frac{\theta_1 s(0)}{ms + d + (0)} &= 0 \\
rs \left( 1 - \frac{s}{K} \right) &= 0 \\
rs \left( \frac{K - s}{K} \right) &= 0 \\
\frac{Krs - rs^2}{K} &= 0 \\
Krs - rs^2 &= 0 \\
s(Kr - rs) &= 0, \quad Kr - rs \neq 0
\end{aligned}$$

maka didapat

$$s = 0 \quad \text{atau} \quad Kr = rs \rightarrow K = s$$

Sehingga diperoleh titik kesetimbangan yaitu titik kesetimbangan bebas penyakit  $E_1(K, 0, 0)$ .

Mensubstitusikan titik kesetimbangan bebas penyakit  $E_1(K, 0, 0)$  pada matriks Jacobian (4.6) didapat

$$J(E_1) = \begin{pmatrix} -r & r - \lambda K & -\frac{\theta_1 K}{mK + d} \\ 0 & \lambda K - \mu & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\theta_2 K}{mK + d} - \mu_1 \end{pmatrix} \quad (4.16)$$

Selanjutnya dicari Persamaan karakteristik dari matriks Jacobian tersebut dengan menghitung  $|J - \lambda I| = 0$ , berikut perhitungannya

$$|J - \lambda I| = 0$$

$$\left| \begin{bmatrix} -r & r - \lambda K & -\frac{\theta_1 K}{mK + d} \\ 0 & \lambda K - \mu & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\theta_2 K}{mK + d} - \mu_1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix} \right| = 0$$

$$\begin{vmatrix} -r - \lambda_1 & r - \lambda K - \lambda & -\frac{\theta_1 K}{mK + d} - \lambda \\ 0 & \lambda K - \mu - \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\theta_2 K}{mK + d} - \mu_1 - \lambda_3 \end{vmatrix} = 0$$

$$(-r - \lambda_1)(\lambda K - \mu - \lambda_2) \left( \frac{\theta_2 K}{mK + d} - \mu_1 - \lambda_3 \right) - 0 + 0 = 0$$

$$(-r - \lambda_1)(\lambda K - \mu - \lambda_2) \left( \frac{\theta_2 K}{mK + d} - \mu_1 - \lambda_3 \right) = 0 \quad (4.17)$$

Sehingga diperoleh nilai eigen dari akar karakteristiknya sebagai berikut

$$\begin{aligned}
\lambda_{1E_1} &= -r \\
\lambda_{2E_1} &= \lambda K - \mu \\
\lambda_{3E_1} &= \frac{\theta_2 K}{mK + d} - \mu_1
\end{aligned}$$

Berdasarkan nilai eigen yang diperoleh pada perhitungan (4.17) jika  $\lambda K > \mu$  dan  $\frac{\theta_2 K}{mK + d} > \mu_1$  maka kestabilan pada titik kesetimbangan  $E_1$  tidak stabil (*saddle*). Tetapi jika  $\lambda K < \mu$  dan  $\frac{\theta_2 K}{mK + d} < \mu_1$  maka kestabilan pada titik kesetimbangan  $E_1$  adalah stabil asimtotis.

#### 4.6 Titik Kestimbangan Bebas Predator

Dari Persamaan (4.1), (4.2) dan (4.3) pada saat setimbang diperoleh

$$\begin{aligned}
\frac{\theta_2 sp}{ms + i + d} - \frac{m_2 ip}{ms + i + d} - \mu_1 p &= 0 \\
p \left( \frac{\theta_2 s}{ms + i + d} - \frac{m_2 i}{ms + i + d} - \mu_1 \right) &= 0
\end{aligned}$$

sehingga didapat

$$p = 0 \text{ atau}$$

$$\frac{\theta_2 s}{ms + i + d} - \frac{m_2 i}{ms + i + d} - \mu_1 \neq 0 \quad (4.18)$$

Selanjutnya, dari Persamaan (4.18) disubstitusikan ke Persamaan (4.2)

$$\lambda si - \frac{m_1 i(0)}{ms + i + d} - \mu i = 0$$

$$\lambda si - \mu i = 0$$

$$\lambda si = \mu i$$

$$s = \bar{s} = \frac{\mu}{\lambda} \quad (4.19)$$

dari Persamaan (4.18) dan (4.19) disubstitusikan ke Persamaan (4.3)

$$r \left( \frac{\mu}{\lambda} \right) \left( 1 - \frac{\left( \frac{\mu}{\lambda} \right) + i}{K} \right) - \lambda \left( \frac{\mu}{\lambda} \right) i - \frac{\theta_1 s(0)}{m \left( \frac{\mu}{\lambda} \right) + d + (0)} = 0$$

$$\frac{r\mu}{\lambda} \left( \frac{K\lambda - \mu - \lambda i}{K\lambda} \right) - \mu i = 0$$

$$\frac{K\lambda r\mu - r\mu^2 - \lambda r\mu i}{K\lambda^2} - \mu i = 0$$

$$\frac{K\lambda r\mu - r\mu^2 - \lambda r\mu i - \mu K\lambda^2 i}{K\lambda^2} = 0$$

$$K\lambda r\mu - r\mu^2 - \lambda r\mu i - \mu K\lambda^2 i = 0$$

$$K\lambda r\mu - r\mu^2 = \lambda r\mu i + \mu K\lambda^2 i$$

$$r\mu(K\lambda - \mu) = \mu\lambda(r + K\lambda)i$$

$$i = \bar{i} = \frac{r(K\lambda - \mu)}{\lambda(r + K\lambda)}$$

Sehingga diperoleh titik kesetimbangan yaitu titik kesetimbangan bebas predator  $E_2(\bar{s}, \bar{i}, 0)$ .

#### 4.7 Analisis Kestabilan Titik Kesetimbangan Bebas Predator

Mensubstitusikan titik kesetimbangan bebas penyakit  $E_2(\bar{s}, \bar{i}, 0)$  pada matriks Jacobian (4.6) didapat

$$J = \begin{pmatrix} r - \frac{2r\bar{s}}{K} - \frac{r\bar{i}}{K} - \lambda\bar{i} & -\frac{r\bar{s}}{K} - \lambda\bar{s} & -\frac{\theta_1\bar{s}}{m\bar{s} + d + \bar{i}} \\ \lambda\bar{i} & \lambda\bar{s} - \mu & -\frac{m_1\bar{i}}{m\bar{s} + \bar{i} + d} \\ 0 & 0 & \frac{\theta_2\bar{s}}{m\bar{s} + \bar{i} + d} + \frac{m_2\bar{i}}{m\bar{s} + \bar{i} + d} - \mu_1 \end{pmatrix}$$

Selanjutnya dicari Persamaan karakteristik dari matriks

Jacobian tersebut dengan menghitung  $|J - \lambda I| = 0$ , berikut perhitungannya

$$|J - \lambda I| = 0$$

$$\begin{vmatrix} r - \frac{2r\bar{s}}{K} - \frac{r\bar{i}}{K} - \lambda\bar{i} & -\frac{r\bar{s}}{K} - \lambda\bar{s} & -\frac{\theta_1\bar{s}}{m\bar{s} + d + \bar{i}} \\ \lambda\bar{i} & \lambda\bar{s} - \mu & -\frac{m_1 i}{m\bar{s} + \bar{i} + d} \\ 0 & 0 & \frac{\theta_2\bar{s}}{m\bar{s} + \bar{i} + d} + \frac{m_2\bar{i}}{m\bar{s} + \bar{i} + d} - \mu_1 \end{vmatrix}$$

$$- \begin{vmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} r - \frac{2r\bar{s}}{K} - \frac{r\bar{i}}{K} - \lambda\bar{i} - \lambda_1 & -\frac{r\bar{s}}{K} - \lambda\bar{s} & -\frac{\theta_1\bar{s}}{m\bar{s} + d + \bar{i}} \\ \lambda\bar{i} & \lambda\bar{s} - \mu - \lambda_2 & -\frac{m_1 i}{m\bar{s} + \bar{i} + d} \\ 0 & 0 & \frac{\theta_2\bar{s}}{m\bar{s} + \bar{i} + d} + \frac{m_2\bar{i}}{m\bar{s} + \bar{i} + d} - \mu_1 - \lambda_3 \end{vmatrix}$$

$$= 0$$

$$\left( r - \frac{2r\bar{s}}{K} - \frac{r\bar{i}}{K} - \lambda\bar{i} - \lambda_1 \right) \begin{vmatrix} \lambda\bar{s} - \mu - \lambda_2 & -\frac{m_1 i}{m\bar{s} + \bar{i} + d} \\ 0 & \frac{\theta_2\bar{s}}{m\bar{s} + \bar{i} + d} + \frac{m_2\bar{i}}{m\bar{s} + \bar{i} + d} - \mu_1 - \lambda_3 \end{vmatrix}$$

$$- \left( -\frac{r\bar{s}}{K} - \lambda\bar{s} \right) \begin{vmatrix} \lambda\bar{i} & -\frac{m_1 i}{m\bar{s} + \bar{i} + d} \\ 0 & \frac{\theta_2\bar{s}}{m\bar{s} + \bar{i} + d} + \frac{m_2\bar{i}}{m\bar{s} + \bar{i} + d} - \mu_1 - \lambda_3 \end{vmatrix}$$



$$\begin{aligned}
& + \left( -\frac{\theta_1 \bar{s}}{m\bar{s} + d + \bar{t}} \right) \left| \begin{matrix} \lambda \bar{t} & \bar{s} - \mu - \lambda_2 \\ 0 & 0 \end{matrix} \right| = 0 \\
& \left( r - \frac{2r\bar{s}}{K} - \frac{r\bar{t}}{K} - \lambda \bar{t} - \lambda_1 \right) (\lambda \bar{s} - \mu - \lambda_2) \left( \frac{\theta_2 \bar{s}}{m\bar{s} + \bar{t} + d} + \frac{m_2 \bar{t}}{m\bar{s} + \bar{t} + d} \right. \\
& \quad \left. - \mu_1 - \lambda_3 \right) \\
& - \left( -\frac{r\bar{s}}{K} - \lambda \bar{s} \right) (\lambda \bar{t}) \left( \frac{\theta_2 \bar{s}}{m\bar{s} + \bar{t} + d} + \frac{m_2 \bar{t}}{m\bar{s} + \bar{t} + d} - \mu_1 - \lambda_3 \right) = 0 \\
& \left( \frac{\theta_2 \bar{s}}{m\bar{s} + \bar{t} + d} + \frac{m_2 \bar{t}}{m\bar{s} + \bar{t} + d} - \mu_1 \right. \\
& \quad \left. - \lambda_3 \right) \left( \left( r - \frac{2r\bar{s}}{K} - \frac{r\bar{t}}{K} - \lambda \bar{t} - \lambda_1 \right) (\lambda \bar{s} - \mu - \lambda_2) \right) \\
& - \left( \left( -\frac{r\bar{s}}{K} - \lambda \bar{s} \right) (\lambda \bar{t}) \right) = 0 \tag{4.20}
\end{aligned}$$

Maka diperoleh nilai eigen sebagai berikut

$$\begin{aligned}
& \frac{\theta_2 \bar{s}}{m\bar{s} + \bar{t} + d} + \frac{m_2 \bar{t}}{m\bar{s} + \bar{t} + d} - \mu_1 - \lambda_3 = 0 \\
& \lambda_1 = \frac{\theta_2 \left( \frac{\mu}{\lambda} \right)}{m \left( \frac{\mu}{\lambda} \right) + \frac{r(K\lambda - \mu)}{\lambda(r + K\lambda)} + d} + \frac{m_2 \left( \frac{r(K\lambda - \mu)}{\lambda(r + K\lambda)} \right)}{m \left( \frac{\mu}{\lambda} \right) + \frac{r(K\lambda - \mu)}{\lambda(r + K\lambda)} + d} - \mu_1
\end{aligned}$$

dan

$$\begin{aligned}
& \left( \left( r - \frac{2r\bar{s}}{K} - \frac{r\bar{t}}{K} - \lambda \bar{t} \right) - \lambda_1 \right) ((\lambda \bar{s} - \mu) - \lambda_2) - \left( -\frac{r\bar{s}}{K} - \lambda \bar{s} \right) (\lambda \bar{t}) \\
& = 0 \\
& \left( r - \frac{2r\bar{s}}{K} - \frac{r\bar{t}}{K} - \lambda \bar{t} \right) (\lambda \bar{s} - \mu) - \left( r - \frac{2r\bar{s}}{K} - \frac{r\bar{t}}{K} - \lambda \bar{t} \right) \lambda_2 \\
& - (\lambda \bar{s} - \mu) \lambda_1 + \lambda_{1,2}^2 - \left( -\frac{r\bar{s}}{K} - \lambda \bar{s} \right) (\lambda \bar{t}) = 0 \\
& \left( r - \frac{2r \left( \frac{\mu}{\lambda} \right)}{K} - \frac{r \frac{r(K\lambda - \mu)}{\lambda(r + K\lambda)}}{K} - \lambda \frac{r(K\lambda - \mu)}{\lambda(r + K\lambda)} \right) \left( \lambda \left( \frac{\mu}{\lambda} \right) - \mu \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \left( r - \frac{2r \left( \frac{\mu}{\lambda} \right)}{K} - \frac{r \frac{r(K\lambda - \mu)}{\lambda(r + K\lambda)}}{K} - \lambda \frac{r(K\lambda - \mu)}{\lambda(r + K\lambda)} \right) \lambda_2 \\
& - \left( \lambda \left( \frac{\mu}{\lambda} \right) - \mu \right) \lambda_1 + \lambda_{1,2}^2 - \left( -\frac{r \left( \frac{\mu}{\lambda} \right)}{K} - \lambda \left( \frac{\mu}{\lambda} \right) \right) \left( \lambda \frac{r(K\lambda - \mu)}{\lambda(r + K\lambda)} \right) = 0 \\
& \lambda_{1,2}^2 - \left( r - \frac{2r \left( \frac{\mu}{\lambda} \right)}{K} - \frac{r \frac{r(K\lambda - \mu)}{\lambda(r + K\lambda)}}{K} - \lambda \frac{r(K\lambda - \mu)}{\lambda(r + K\lambda)} \right) \lambda_2 \\
& + \left( r - \frac{2r \left( \frac{\mu}{\lambda} \right)}{K} - \frac{r \frac{r(K\lambda - \mu)}{\lambda(r + K\lambda)}}{K} - \lambda \frac{r(K\lambda - \mu)}{\lambda(r + K\lambda)} \right) (0) \\
& - \left( -\frac{r \left( \frac{\mu}{\lambda} \right)}{K} - \lambda \left( \frac{\mu}{\lambda} \right) \right) \left( \lambda \frac{r(K\lambda - \mu)}{\lambda(r + K\lambda)} \right) = 0 \\
& \lambda_{1,2}^2 - \left( -\frac{2r\mu}{K\lambda} - \frac{r^2(K\lambda - \mu)}{K\lambda(r + K\lambda)} - \frac{r(K\lambda - \mu)}{(r + K\lambda)} \right) \lambda_2 \\
& - \left( -\frac{r\mu}{K\lambda} - \mu \right) \left( \frac{r(K\lambda - \mu)}{(r + K\lambda)} \right) = 0 \\
& \lambda_{1,2}^2 + \left( \frac{r\mu}{K\lambda} \right) \lambda_2 + \frac{r\mu(K\lambda - \mu)}{K\lambda} = 0 \\
& (K\lambda)\lambda_{1,2}^2 + (r\mu)\lambda_2 + (K\lambda r\mu - r\mu^2) = 0
\end{aligned}$$

Maka diperoleh nilai eigen sebagai berikut

$$\begin{aligned}
\lambda_{1,2} &= \frac{-r\mu \pm \sqrt{(r\mu)^2 - 4(K\lambda)((K\lambda r\mu - r\mu^2))}}{2(K\lambda)} \\
&= \frac{-r\mu \pm \sqrt{(r\mu)^2 - 4(K^2\lambda^2 r\mu - K\lambda r\mu^2)}}{2(K\lambda)}
\end{aligned}$$

$$= \frac{-r\mu \pm \sqrt{r\mu(r\mu - 4K^2\lambda^2 + 4K\lambda\mu - \mu^2 + \mu^2)}}{2(K\lambda)}$$

$$= \frac{-r\mu \pm \sqrt{r\mu}\sqrt{\mu(\mu + r\mu) - (2K\lambda - \mu)^2}}{2(K\lambda)}$$

Sehingga nilai eigen dari titik kesetimbangan  $E_2$  adalah sebagai berikut

$$\lambda_{1E_2} = \frac{-r\mu + \sqrt{r\mu}\sqrt{\mu(\mu + r\mu) - (2K\lambda - \mu)^2}}{2(K\lambda)}$$

$$\lambda_{2E_2} = \frac{-r\mu - \sqrt{r\mu}\sqrt{\mu(\mu + r\mu) - (2K\lambda - \mu)^2}}{2(K\lambda)}$$

$$\lambda_{3E_2} = \frac{\theta_2\left(\frac{\mu}{\lambda}\right)}{m\left(\frac{\mu}{\lambda}\right) + \frac{r(K\lambda - \mu)}{\lambda(r + K\lambda)} + d} + \frac{m_2\left(\frac{r(K\lambda - \mu)}{\lambda(r + K\lambda)}\right)}{m\left(\frac{\mu}{\lambda}\right) + \frac{r(K\lambda - \mu)}{\lambda(r + K\lambda)} + d} - \mu_1$$

Berdasarkan nilai eigen yang diperoleh pada perhitungan (4.20) jika  $\lambda_{1E_2}, \lambda_{2E_2}, \lambda_{3E_2} < 0$  maka kestabilan pada titik kesetimbangan  $E_2$  adalah stabil asimtotis.

$$\lambda_{1E_2} < 0 \quad \text{jika } K\lambda < \mu$$

$$\lambda_{2E_2}, \lambda_{3E_2} < 0 \quad \text{jika } r\mu > \sqrt{r\mu}\sqrt{\mu(\mu + r\mu) - (2K\lambda - \mu)^2} \text{ atau } \mu(\mu + r\mu) - (2K\lambda - \mu)^2 < 0$$

#### 4.8 Titik Kesetimbangan Planar

Dari Persamaan (4.1), (4.2) dan (4.3) pada saat setimbang diperoleh

$$\lambda si - \frac{m_1 ip}{ms + i + d} - \mu i = 0$$

$$i \left( \lambda s - \frac{m_1 p}{ms + i + d} - \mu \right) = 0$$

sehingga didapat

$$i = \bar{i} = 0 \quad \text{dan} \quad \lambda s - \frac{m_1 p}{ms+i+d} - \mu = 0 \quad (4.21)$$

Selanjutnya dari persamaan (4.21) disubstitusikan pada Persamaan (4.3)

$$\begin{aligned} \frac{\theta_2 s p}{ms + (0) + d} + \frac{m_2(0)p}{ms + (0) + d} - \mu_1 p &= 0 \\ \frac{\theta_2 s p}{ms + d} - \mu_1 p &= 0 \\ \theta_2 s p &= \mu_1 p (ms + d) \\ \theta_2 s &= \mu_1 ms + \mu_1 d \\ (\theta_2 - \mu_1 m)s &= \mu_1 d \\ s = \bar{s} &= \frac{\mu_1 d}{\theta_2 - \mu_1 m} \end{aligned} \quad (4.22)$$

Kemudian dari persamaan (4.21) dan (4.22) disubstitusikan pada Persamaan (4.1)

$$\begin{aligned} r \left( \frac{\mu_1 d}{\theta_2 - \mu_1 m} \right) \left( 1 - \frac{\left( \frac{\mu_1 d}{\theta_2 - \mu_1 m} \right) + (0)}{K} \right) - \lambda \left( \frac{\mu_1 d}{\theta_2 - \mu_1 m} \right) (0) \\ - \frac{\theta_1 \left( \frac{\mu_1 d}{\theta_2 - \mu_1 m} \right) p}{m \left( \frac{\mu_1 d}{\theta_2 - \mu_1 m} \right) + (0) + d} = 0 \\ r \left( \frac{\mu_1 d}{\theta_2 - \mu_1 m} \right) \left( 1 - \frac{\left( \frac{\mu_1 d}{\theta_2 - \mu_1 m} \right)}{K} \right) = \frac{\theta_1 \left( \frac{\mu_1 d}{\theta_2 - \mu_1 m} \right) p}{m \left( \frac{\mu_1 d}{\theta_2 - \mu_1 m} \right) + d} \\ r \left( \frac{\mu_1 d}{\theta_2 - \mu_1 m} \right) \left( 1 - \frac{\left( \frac{\mu_1 d}{\theta_2 - \mu_1 m} \right)}{K} \right) \frac{m \left( \frac{\mu_1 d}{\theta_2 - \mu_1 m} \right) + d}{\theta_1 \left( \frac{\mu_1 d}{\theta_2 - \mu_1 m} \right)} = p \end{aligned}$$

$$p = \bar{p} = \frac{r}{\theta_1} \left( 1 - \frac{\left( \frac{\mu_1 d}{\theta_2 - \mu_1 m} \right)}{K} \right) \left( m \left( \frac{\mu_1 d}{\theta_2 - \mu_1 m} \right) + d \right)$$

Sehingga diperoleh titik kesetimbangan yaitu titik kesetimbangan planar  $E_3(\bar{s}, 0, \bar{p})$ .

#### 4.9 Analisis Kestabilan Titik Kesetimbangan Planar

Mensubstitusikan titik kesetimbangan bebas penyakit  $E_3(\bar{s}, 0, \bar{p})$  pada matriks Jacobian (4.6) didapat

$$J = \begin{pmatrix} r - \frac{2r\bar{s}}{K} - \frac{\theta_1\bar{p}(d)}{(m\bar{s} + d)^2} & -\frac{r\bar{s}}{K} - \lambda\bar{s} - \frac{\theta_1\bar{s}\bar{p}}{(m\bar{s} + d)^2} & -\frac{\theta_1\bar{s}}{m\bar{s} + d} \\ 0 & \lambda\bar{s} - \frac{m_1\bar{p}(m\bar{s} + d)}{(m\bar{s} + d)^2} - \mu & 0 \\ \frac{\theta_2\bar{p}(d)}{m\bar{s} + d} & -\frac{\theta_2\bar{s}}{(m\bar{s} + d)^2} - \frac{m_2\bar{p}(m\bar{s} + d)}{(m\bar{s} + d)^2} & \frac{\theta_2\bar{s}}{m\bar{s} + d} + \mu_1 \end{pmatrix}$$

Selanjutnya dicari Persamaan karakteristik dari matriks Jacobian tersebut dengan menghitung  $|J - \lambda I| = 0$ , berikut perhitungannya

$$|J - \lambda I| = 0$$

$$\begin{vmatrix} r - \frac{2r\bar{s}}{K} - \frac{\theta_1\bar{p}(d)}{(m\bar{s} + d)^2} - \lambda & -\frac{r\bar{s}}{K} - \lambda\bar{s} - \frac{\theta_1\bar{s}\bar{p}}{(m\bar{s} + d)^2} & -\frac{\theta_1\bar{s}}{m\bar{s} + d} \\ 0 & \lambda\bar{s} - \frac{m_1\bar{p}(m\bar{s} + d)}{(m\bar{s} + d)^2} - \mu - \lambda & 0 \\ \frac{\theta_2\bar{p}(d)}{m\bar{s} + d} & -\frac{\theta_2\bar{s}}{(m\bar{s} + d)^2} - \frac{m_2\bar{p}(m\bar{s} + d)}{(m\bar{s} + d)^2} & \frac{\theta_2\bar{s}}{m\bar{s} + d} + \mu_1 - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$-\begin{vmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix}
r - \frac{2r\bar{s}}{K} - \frac{\theta_1\bar{p}(d)}{(m\bar{s}+d)^2} - \lambda_1 & -\frac{r\bar{s}}{K} - \lambda\bar{s} - \frac{\theta_1\bar{s}\bar{p}}{(m\bar{s}+d)^2} & -\frac{\theta_1\bar{s}}{m\bar{s}+d} \\
0 & \lambda\bar{s} - \frac{m_1\bar{p}(m\bar{s}+d)}{(m\bar{s}+d)^2} - \mu - \lambda_2 & 0 \\
\frac{\theta_2\bar{p}(d)}{m\bar{s}+d} & -\frac{\theta_2\bar{s}}{(m\bar{s}+d)^2} - \frac{m_2\bar{p}(m\bar{s}+d)}{(m\bar{s}+d)^2} & \frac{\theta_2\bar{s}}{m\bar{s}+d} + \mu_1 - \lambda_3
\end{vmatrix}
= 0$$

$$\begin{aligned}
& \left( r - \frac{2r\bar{s}}{K} - \frac{\theta_1\bar{p}(d)}{(m\bar{s}+d)^2} \right. \\
& \left. - \lambda_1 \right) \begin{vmatrix} \lambda\bar{s} - \frac{m_1\bar{p}(m\bar{s}+d)}{(m\bar{s}+d)^2} - \mu - \lambda_2 & 0 \\ -\frac{\theta_2\bar{s}}{(m\bar{s}+d)^2} - \frac{m_2\bar{p}(m\bar{s}+d)}{(m\bar{s}+d)^2} & \frac{\theta_2\bar{s}}{m\bar{s}+d} + \mu_1 - \lambda_3 \end{vmatrix} \\
& - \left( -\frac{r\bar{s}}{K} - \lambda\bar{s} - \frac{\theta_1\bar{s}\bar{p}}{(m\bar{s}+d)^2} \right) \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ \frac{\theta_2\bar{p}(d)}{m\bar{s}+d} & \frac{\theta_2\bar{s}}{m\bar{s}+d} + \mu_1 - \lambda_3 \end{vmatrix} \\
& + \left( -\frac{\theta_1\bar{s}}{m\bar{s}+d} \right) \begin{vmatrix} 0 & \lambda\bar{s} - \frac{m_1\bar{p}(m\bar{s}+d)}{(m\bar{s}+d)^2} - \mu - \lambda_2 \\ \frac{\theta_2\bar{p}(d)}{m\bar{s}+d} & -\frac{\theta_2\bar{s}}{(m\bar{s}+d)^2} - \frac{m_2\bar{p}(m\bar{s}+d)}{(m\bar{s}+d)^2} \end{vmatrix} = 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left( r - \frac{2r\bar{s}}{K} - \frac{\theta_1\bar{p}(d)}{(m\bar{s}+d)^2} - \lambda_1 \right) \left( \lambda\bar{s} - \frac{m_1\bar{p}(m\bar{s}+d)}{(m\bar{s}+d)^2} - \mu - \lambda_2 \right) \left( \frac{\theta_2\bar{s}}{m\bar{s}+d} \right. \\
& \left. - \mu_1 - \lambda_3 \right) - \left( \frac{\theta_1\bar{s}}{m\bar{s}+d} \right) \left( \frac{\theta_2\bar{p}(d)}{m\bar{s}+d} \right) \left( \lambda\bar{s} - \frac{m_1\bar{p}(m\bar{s}+d)}{(m\bar{s}+d)^2} - \mu - \lambda_2 \right) = 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left( \lambda\bar{s} - \frac{m_1\bar{p}(m\bar{s}+d)}{(m\bar{s}+d)^2} - \mu \right. \\
& \left. - \lambda_2 \right) \left( \left( r - \frac{2r\bar{s}}{K} - \frac{\theta_1\bar{p}(d)}{(m\bar{s}+d)^2} - \lambda_1 \right) \left( \frac{\theta_2\bar{s}}{m\bar{s}+d} - \mu_1 - \lambda_3 \right) \right. \\
& \left. - \left( \frac{\theta_1\bar{s}}{m\bar{s}+d} \right) \left( \frac{\theta_2\bar{p}(d)}{m\bar{s}+d} \right) \right) = 0 \tag{4.23}
\end{aligned}$$

sehingga didapat

$$\lambda \bar{s} - \frac{m_1 \bar{p}(m \bar{s} + d)}{(m \bar{s} + d)^2} - \mu - \lambda_2 = 0$$

$$\lambda \left( \frac{\mu_1 d}{\theta_2 - \mu_1 m} \right) \\ m_1 \left( \frac{r}{\theta_1} \left( 1 - \frac{\left( \frac{\mu_1 d}{\theta_2 - \mu_1 m} \right)}{K} \right) \left( m \left( \frac{\mu_1 d}{\theta_2 - \mu_1 m} \right) + d \right) \right) \left( m \left( \frac{\mu_1 d}{\theta_2 - \mu_1 m} \right) + d \right) \\ - \frac{\left( m \left( \frac{\mu_1 d}{\theta_2 - \mu_1 m} \right) + d \right)^2}{\theta_2 - \mu_1 m} - \mu = \lambda_2$$

$$\lambda_2 = -\mu + \frac{d\mu_1 \lambda}{\theta_2 - \mu_1 m} - \frac{m_1 r}{\theta_1} \left( 1 - \frac{d\mu_1 \lambda}{K(\theta_2 - \mu_1 m)} \right)$$

atau

$$\left( r - \frac{2r\bar{s}}{K} - \frac{\theta_1 \bar{p}(d)}{(m\bar{s} + d)^2} - \lambda_1 \right) \left( \frac{\theta_2 \bar{s}}{m\bar{s} + d} - \mu_1 - \lambda_3 \right) \\ - \left( \frac{\theta_1 \bar{s}}{m\bar{s} + d} \right) \left( \frac{\theta_2 \bar{p}(d)}{m\bar{s} + d} \right) = 0$$

$$\left( r - \frac{2r\bar{s}}{K} - \frac{\theta_1 \bar{p}(d)}{(m\bar{s} + d)^2} \right) \left( \frac{\theta_2 \bar{s}}{m\bar{s} + d} - \mu_1 \right) \\ - \left( \left( r - \frac{2r\bar{s}}{K} - \frac{\theta_1 \bar{p}(d)}{(m\bar{s} + d)^2} \right) + \left( \frac{\theta_2 \bar{s}}{m\bar{s} + d} - \mu_1 \right) \right) \lambda_{1,2} + \lambda_{1,2}^2 = 0$$

$$\lambda_{1,2}^2 - \left( \frac{-rd\mu_1\theta_2 - r\mu_1 m K \theta_2 - K r m^2 \mu_1^2 + r d m \mu_1^2}{K \theta_2 (\theta_2 - m \mu_1)} \right) \lambda_{1,2} \\ + \left( \frac{d r m \mu_1^3 - r m^2 K \mu_1^3 - K \theta_2 r m \mu_1^2 - d r \theta_2 m \mu_1^2 - m K \theta_2 r m \mu_1^3 + K \theta_2^2 r \mu_1}{K \theta_2 (\theta_2 - m \mu_1)} \right) \\ = 0$$

$$\begin{aligned}
& \lambda_{1,2}^2 - \left( \frac{-rd\mu_1\theta_2 - r\mu_1mK\theta_2 - Krm^2\mu_1^2 + rdm\mu_1^2}{K\theta_2(\theta_2 - m\mu_1)} \right) \lambda_{1,2} \\
& + \left( \frac{(drm\mu_1^3 - rm^2K\mu_1^3 - K\theta_2rm\mu_1^2 - dr\theta_2m\mu_1^2 - mK\theta_2rm\mu_1^3 + K\theta_2^2r\mu_1)}{K\theta_2(\theta_2 - m\mu_1)} \right) \\
& = 0 \\
& (K\theta_2(\theta_2 - m\mu_1))\lambda_{1,2}^2 \\
& + (rd\mu_1\theta_2 + r\mu_1mK\theta_2 + Krm^2\mu_1^2 - rdm\mu_1^2)\lambda_{1,2} \\
& + (drm\mu_1^3 - rm^2K\mu_1^3 - K\theta_2rm\mu_1^2 - dr\theta_2m\mu_1^2 - mK\theta_2rm\mu_1^3 \\
& + K\theta_2^2r\mu_1) = 0 \\
& (K\theta_2(\theta_2 - m\mu_1))\lambda_{1,2}^2 \\
& + (r\mu_1((m\mu_1)(d + mK) + \theta_2(d - mK)))\lambda_{1,2} \\
& + (r\mu_1(m - \theta_2)(d\mu_1 + mK - K\theta_2)) = 0
\end{aligned}$$

Sehingga diperoleh nilai eigen dari titik kesetimbangan  $E_3$  sebagai berikut

$$\begin{aligned}
\lambda_2 &= -\mu + \frac{d\mu_1\lambda}{\theta_2 - \mu_1m} - \frac{m_1r}{\theta_1} \left( 1 - \frac{d\mu_1\lambda}{K(\theta_2 - \mu_1m)} \right) \\
\lambda_1 &= \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \lambda_3 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}
\end{aligned}$$

dengan

$$\begin{aligned}
a &= K\theta_2(\theta_2 - m\mu_1) \\
b &= r\mu_1((m\mu_1)(d + mK) + \theta_2(d - mK)) \\
c &= r\mu_1(m - \theta_2)(d\mu_1 + mK - K\theta_2)
\end{aligned}$$

Berdasarkan nilai eigen yang diperoleh pada perhitungan (4.20) jika  $\lambda_{1E_3}, \lambda_{2E_3}, \lambda_{3E_3} < 0$  maka kestabilan pada titik kesetimbangan  $E_2$  adalah stabil asimtotis.

$$\lambda_{2E_3} < 0 \quad \text{jika } \theta_2 < \mu_1m$$

$$\lambda_{1E_3}, \lambda_{3E_3} < 0 \quad \text{jika } b < \sqrt{b^2 - 4ac} \quad \text{atau } \sqrt{b^2 - 4ac} < 0$$



#### 4.10 Titik Kesetimbangan Non Trivial

Dari Persamaan (4.1), (4.2) dan (4.3) pada saat setimbang dengan  $s, i, p = s^*, i^*, p^* \neq 0$  diperoleh

$$\begin{aligned}
 & \frac{\theta_2 s p}{m s + i + d} + \frac{m_2 i p}{m s + i + d} - \mu_1 p = 0 \\
 & p \left( \frac{\theta_2 s}{m s + i + d} + \frac{m_2 i}{m s + i + d} - \mu_1 \right) = 0 \\
 & p = 0 \text{ atau} \\
 & \frac{\theta_2 s}{m s + i + d} + \frac{m_2 i}{m s + i + d} - \mu_1 \neq 0 \\
 & \frac{\theta_2 s}{m s + i + d} + \frac{m_2 i}{m s + i + d} = \mu_1 \\
 & \theta_2 s + m_2 i = \mu_1 m s + \mu_1 i + \mu_1 d \\
 & m_2 i - \mu_1 i = \mu_1 d - \theta_2 s + \mu_1 m s \\
 & i = i^* = \frac{\mu_1 d - (\theta_2 + \mu_1 m) s}{m_2 - \mu_1} \tag{4.24}
 \end{aligned}$$

Selanjutnya dari persamaan (4,2) diperoleh

$$\begin{aligned}
 & \lambda s i - \frac{m_1 i p}{m s + i + d} - \mu i = 0 \\
 & i \left( \lambda s - \frac{m_1 p}{m s + i + d} - \mu \right) = 0 \\
 & i = 0 \text{ atau} \\
 & \lambda s - \frac{m_1 p}{m s + i + d} - \mu \neq 0 \\
 & \lambda s - \frac{m_1 p}{m s + i + d} = \mu \\
 & \frac{\lambda s(m s + i + d) - m_1 p}{m s + i + d} = \mu \\
 & \lambda s(m s + i + d) - m_1 p = \mu(m s + i + d) \\
 & m_1 p = \lambda s(m s + i + d) - \mu(m s + i + d) \\
 & p = p^* = \frac{(\lambda s^* - \mu)(m s^* + i^* + d)}{m_1} \tag{4.25}
 \end{aligned}$$

Selanjutnya mensubstitusikan persamaan (4.23) dan (4.23) ke persamaan (4.1)

$$\begin{aligned}
rs \left( 1 - \frac{s+i}{K} \right) - \lambda si - \frac{\theta_1 sp}{ms+i+d} &= 0 \\
s \left( r \left( 1 - \frac{s+i}{K} \right) - \lambda i - \frac{\theta_1 p}{ms+i+d} \right) &= 0 \\
s = 0 \text{ atau} \\
r \left( 1 - \frac{s^* + \left( \frac{\mu_1 d - (\theta_2 + \mu_1 m)s^*}{m_2 - \mu_1} \right)}{K} \right) - \lambda \left( \frac{\mu_1 d - (\theta_2 + \mu_1 m)s^*}{m_2 - \mu_1} \right) \\
- \frac{\theta_1 \left( \frac{(\lambda s^* - \mu)(ms^* + i^* + d)}{m_1} \right)}{ms^* + i^* + d} &\neq 0 \\
r \left( 1 - \frac{s^*(m_2 - \mu_1) + \mu_1 d - (\theta_2 + \mu_1 m)s^*}{K(m_2 - \mu_1)} \right) \\
- \lambda \left( \frac{\mu_1 d - (\theta_2 + \mu_1 m)s^*}{m_2 - \mu_1} \right) &= \theta_1 \left( \frac{\lambda s^* - \mu}{m_1} \right) \\
r - \frac{rs^*(m_2 - \mu_1) + r\mu_1 d - r(\theta_2 + \mu_1 m)s^*}{K(m_2 - \mu_1)} \\
- \frac{\mu_1 d \lambda - s^* \lambda \theta_2 - s^* \lambda \mu_1 m}{m_2 - \mu_1} &= \frac{\theta_1 \lambda s^* - \theta_1 \mu}{m_1} \\
\frac{rm_1 K(m_2 - \mu_1) - (rm_1 s^*(m_2 - \mu_1) + r\mu_1 d m_1 - rm_1(\theta_2 + \mu_1 m)s^*)}{m_1 K(m_2 - \mu_1)} \\
- \frac{K m_1 (\mu_1 d \lambda - s^* \lambda \theta_2 - s^* \lambda \mu_1 m)}{m_1 K(m_2 - \mu_1)} &= \frac{(K(m_2 - \mu_1))(\theta_1 \lambda s^* - \theta_1 \mu)}{m_1 K(m_2 - \mu_1)} \\
rm_1 K m_2 - rm_1 K \mu_1 - rs^* m_1 m_2 + rs^* m_1 \mu_1 - r\mu_1 d m_1 + rs^* m_1 \theta_2 \\
- rs^* \mu_1 m m_1 - K m_1 \mu_1 d \lambda + K m_1 s^* \lambda \theta_2 - K m_1 s^* \lambda \mu_1 m \\
&= K m_2 \theta_1 \lambda s^* - K \mu_1 \theta_1 \lambda s^* - K m_2 \theta_1 \mu + K \mu_1 \theta_1 \mu \\
s^*(rm_1 \mu_1 - rm_1 m_2 - rm_1 \theta_2 - r\mu_1 m m_1 - K m_1 \lambda \theta_2 - K m_1 \lambda \mu_1 m \\
- K m_2 \theta_1 \lambda + K \mu_1 \theta_1 \lambda) &= 0
\end{aligned}$$

$$= -rm_1Km_2 - rm_1K\mu_1 + r\mu_1dm_1 - Km_1\mu_1d\lambda - Km_2\theta_1\mu + K\mu_1\theta_1\mu$$

$s^*$

$$= \frac{-rm_1Km_2 - rm_1K\mu_1 + r\mu_1dm_1 + Km_1\mu_1d\lambda - Km_2\theta_1\mu + K\mu_1\theta_1\mu}{rm_1\mu_1 - rm_1m_2 + rm_1\theta_2 - r\mu_1mm_1 - Km_1\lambda\theta_2 - Km_1\lambda\mu_1m - Km_2\theta_1\lambda + K\mu_1\theta_1\lambda}$$

$s^*$

$$= \frac{\mu_1dm_1(r + K\lambda) - rm_1K(m_2 - \mu_1) - K\theta_1\mu(m_2 - \mu_1)}{rm_1(\theta_2 - \mu_1m) + rm_1(m_2 - \mu_1) - Km_1\lambda(\theta_2 - \mu_1m) - K\theta_1\lambda(m_2 - \mu_1)}$$

$$s^* = \frac{\mu_1dm_1(r + K\lambda) - K(m_2 - \mu_1)(rm_1 + \theta_1)}{m_1(r + K\lambda)(\theta_2 - \mu_1m) - (m_2 - \mu_1)(rm_1 + K\theta_1\lambda)}$$

Sehingga diperoleh titik kesetimbangan yaitu titik kesetimbangan non trivial  $E_4(s^*, i^*, p^*)$ .

#### 4.11 Analisis Kestabilan Titik Kesetimbangan Non Trivial

Mensubstitusikan titik kesetimbangan bebas penyakit  $E_4(s^*, i^*, p^*)$ . pada matriks Jacobian (4.6) sehingga didapat

$$J = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

dengan

$$a_{11} = r - \frac{2rs^*}{K} - \frac{ri^*}{K} - \lambda i^* - \frac{\theta_1 p^*(i^* + d)}{(ms^* + d + i^*)^2}$$

$$a_{12} = -\frac{rs^*}{K} - \lambda s^* - \frac{\theta_1 s^* p^*}{(ms^* + d + i^*)^2}$$

$$a_{13} = -\frac{\theta_1 s^*}{ms^* + d + i^*}$$

$$a_{21} = \lambda i^* + \frac{m_1 i^* p^* m}{(ms^* + d + i^*)^2}$$

$$a_{22} = \lambda s^* - \frac{m_1 p^*(ms^* + d)}{(ms^* + d + i^*)^2} - \mu$$

$$\begin{aligned}
a_{23} &= -\frac{m_1 i^*}{ms^* + d + i^*} \\
a_{31} &= \frac{\theta_2 p^*(i^* + d)}{ms^* + d + i^*} - \frac{m_2 i^* p^* m}{(ms^* + d + i^*)^2} \\
a_{32} &= -\frac{\theta_2 s^* p^*}{(ms^* + d + i^*)^2} - \frac{m_2 p^*(ms^* + d)}{(ms^* + d + i^*)^2} \\
a_{33} &= 0
\end{aligned}$$

Selanjutnya dicari Persamaan karakteristik dari matriks Jacobian tersebut dengan menghitung  $|J - \lambda I| = 0$ , berikut perhitungannya

$$\begin{aligned}
|J - \lambda I| &= 0 \\
\left| \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix} \right| &= 0 \\
\left| \begin{bmatrix} a_{11} - \lambda_1 & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda_2 & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & -\lambda_3 \end{bmatrix} \right| &= 0 \\
(a_{11} - \lambda_1) \begin{bmatrix} a_{22} - \lambda_2 & a_{23} \\ a_{32} & -\lambda_3 \end{bmatrix} - (a_{12}) \begin{bmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & -\lambda_3 \end{bmatrix} \\
+ (a_{13}) \begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} - \lambda_2 \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix} &= 0 \\
(a_{11} - \lambda_1)((a_{22} - \lambda_2)(-\lambda_3) - a_{23}a_{32}) \\
- (a_{12})(a_{21}(-\lambda_3) - a_{23}a_{31}) + (a_{13})(a_{21}a_{32} - a_{31}(a_{22} - \lambda_2)) &= 0 \\
(a_{11} - \lambda_1)(-a_{22}\lambda_3 + \lambda_{2,3}^2 - a_{23}a_{32}) - (a_{12})(-a_{21}\lambda_3 - a_{23}a_{31}) \\
+ (a_{13})(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31} + a_{31}\lambda_2) &= 0 \\
-a_{11}a_{22}\lambda_3 + a_{11}\lambda_{2,3}^2 - a_{11}a_{23}a_{32} + a_{22}\lambda_{1,3}^2 - \lambda_{1,2,3}^3 + a_{23}a_{32}\lambda_1 \\
+ a_{12}a_{21}\lambda_3 + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} + a_{13}a_{31}\lambda_2 &= 0 \\
\lambda_{1,2,3}^3 - (a_{11} + a_{22})\lambda_{1,2,3}^2 \\
+ (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} - a_{23}a_{32} - a_{13}a_{31})\lambda_{1,2,3} \\
+ (a_{11}a_{23}a_{32} + a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{23}a_{31} - a_{13}a_{21}a_{32}) &= 0
\end{aligned}$$

misalkan

$$A_1 = -(a_{11} + a_{22})$$

$$A_2 = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} - a_{23}a_{32} - a_{13}a_{31}$$

$$A_3 = a_{11}a_{23}a_{32} + a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{23}a_{31} - a_{13}a_{21}a_{32}$$

$$\text{maka } \lambda_k^3 + A_1\lambda_k^2 + A_2\lambda_k + A_3 = 0 \quad (4.26)$$

Dengan menggunakan kriteria Routh-Hurwitz untuk menunjukkan kestabilan titik kesetimbangan, maka diperoleh

$\lambda^3$	1	$A_2$	0
$\lambda^2$	$A_1$	$A_3$	0
$\lambda^1$	$\frac{A_1A_2 - A_3}{A_1}$	0	
$\lambda^0$	$A_3$		

Kriteria kestabilan Routh-Hurwitz menyatakan bahwa titik kesetimbangan  $E_4$  dikatakan stabil jika mempunyai bilangan real negatif jika dan hanya jika elemen-elemen pada kolom pertama memiliki tanda yang sama. Sehingga pada persamaan (4.26) akan stabil asimtotis jika dan hanya jika  $A_1 > 0, A_3 > 0$  dan  $A_1A_2 - A_3 > 0$ .

#### 4.12 Analisis Bifurkasi Hopf

Menetapkan rata-rata pertumbuhan intrinsik populasi prey yang rentan ( $r$ ) sebagai parameter bifurkasi sehingga pada titik kesetimbangan  $E_4$  akan kehilangan kestabilannya melalui bifurkasi Hopf dengan meningkatkan nilai parameter  $r$ .

**Teorema 4.1** *Ketika rata-rata pertumbuhan pada populasi rentan  $r$  melintasi a nilai kritisal  $r = r_c$ , sehingga*

sistem (4.1, 4.2, 4.3) masuk kedalam bifurkasi Hopf mengelilingi titik kesetimbangan positif.

Untuk membuktikan Teorema 4.1 maka syarat yang diberikan oleh Liu [12] pada subbab 2.10 harus terpenuhi.

### Bukti

- i. Untuk  $r = r_c$  maka  $A_1(r_c) > 0, A_3(r_c) > 0$ , dan  $\psi(r_c) = A_1(r_c)A_2(r_c) - A_3(r_c) = 0$ .
- ii. Jika  $A_1(r_c)A_2(r_c) - A_3(r_c) = 0$  didapat  $A_3(r_c) = A_1(r_c)A_2(r_c)$

Selanjutnya mensubstitusikan  $A_3$  kedalam Persamaan (4.26)

$$\begin{aligned}\lambda_k^3 + A_1\lambda_k^2 + A_2\lambda_k + A_1A_2 &= 0 \\ \lambda_k^2(\lambda_k + A_1) + A_2(\lambda_k + A_1) &= 0 \\ (\lambda_k^2 + A_2)(\lambda_k + A_1) &= 0\end{aligned}\tag{4.27}$$

untuk semua  $\lambda_k(r)$ , akar-akar umumnya berbentuk

$$\lambda_1 = \eta_1(r) + i\eta_2(r), \quad \lambda_2 = \eta_1(r) - i\eta_2(r), \quad \lambda_3 = -A_1$$

Selanjutnya, mensubstitusikan  $\lambda_1 = \eta_1(r) + i\eta_2(r)$  ke dalam Persamaan (4.27)

$$\begin{aligned}((\eta_1(r) + i\eta_2(r))^2 + A_2(r))((\eta_1(r) + i\eta_2(r)) + A_1(r)) &= 0 \\ (\eta_1^2(r) + 2i\eta_1(r)\eta_2(r) - \eta_2^2(r) + A_2(r))(\eta_1(r) + i\eta_2(r) &+ A_1(r)) = 0 \\ \eta_1^3(r) + 2i\eta_1^2(r)\eta_2(r) - \eta_2^2(r)\eta_1(r) + A_2(r)\eta_1(r) &+ \eta_1^2(r)i\eta_2(r) - 2\eta_1(r)\eta_2^2(r) - i\eta_2^3(r) + A_2(r)i\eta_2(r) \\ + \eta_1^2(r)A_1(r) + 2i\eta_1(r)\eta_2(r)A_1(r) - \eta_2^2(r)A_1(r) &+ A_2(r)A_1(r) = 0\end{aligned}$$

Sehingga, Persamaan  $f(r)$  menjadi

$$f(r) = \eta_1^3(r) + 3i\eta_1^2(r)\eta_2(r) - 3\eta_2^2(r)\eta_1(r) + A_2(r)\eta_1(r) - i\eta_2^3(r) + A_2(r)i\eta_2(r) + \eta_1^2(r)A_1(r) + 2i\eta_1(r)\eta_2(r)A_1(r) - \eta_2^2(r)A_1(r) + A_3(r) = 0$$

Selanjutnya mendiferensialkan  $f(r)$  terhadap  $r$

$$\begin{aligned} \frac{df(r)}{dr} &= \frac{d}{dr} \left( \eta_1^3(r) + 3i\eta_1^2(r)\eta_2(r) - 3\eta_2^2(r)\eta_1(r) + A_2(r)\eta_1(r) - i\eta_2^3(r) + A_2(r)i\eta_2(r) + \eta_1^2(r)A_1(r) + 2i\eta_1(r)\eta_2(r)A_1(r) - \eta_2^2(r)A_1(r) + A_3(r) \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{df(r)}{dr} &= 3\eta_1^2(r)\eta_1'(r) + 6i\eta_1(r)\eta_2(r)\eta_1'(r) + 3i\eta_1^2(r)\eta_2'(r) \\ &\quad - 3\eta_2^2(r)\eta_1'(r) - 6\eta_2(r)\eta_1(r)\eta_2'(r) + A_2(r)\eta_1'(r) \\ &\quad + A_2'(r)\eta_1(r) - 3\eta_2^2(r)i\eta_2'(r) + A_2(r)i\eta_2'(r) \\ &\quad + A_2'(r)i\eta_2(r) + 2\eta_1(r)A_1(r)\eta_1'(r) + \eta_1^2(r)A_1'(r) \\ &\quad + 2\eta_2(r)A_1(r)\eta_1'(r) + 2\eta_1(r)A_1(r)\eta_2'(r) \\ &\quad + 2i\eta_1(r)\eta_2(r)A_1'(r) - 2\eta_2(r)A_1(r)\eta_2'(r) \\ &\quad - \eta_2^2(r)A_1'(r) + A_3'(r) = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{df(r)}{dr} &= (3\eta_1^2(r) - 3\eta_2^2(r) + A_2(r) + 2\eta_1(r)A_1(r))\eta_1'(r) \\ &\quad + (6i\eta_1(r)\eta_2(r) + 2\eta_2(r)A_1(r))\eta_1'(r) \\ &\quad + (3i\eta_1^2(r) - 3\eta_2^2(r)i + A_2(r)i + 2\eta_1(r)A_1(r))\eta_2'(r) \\ &\quad - (6\eta_2(r)\eta_1(r) + 2\eta_2(r)A_1(r))\eta_2'(r) \\ &\quad + (\eta_1^2(r)A_1'(r) - \eta_2^2(r)A_1'(r) + A_2'(r)\eta_1(r) \\ &\quad + A_3'(r)) + (2i\eta_1(r)\eta_2(r)A_1'(r) + A_2'(r)i\eta_2(r)) = 0 \end{aligned}$$

Misalkan

$$K(r) = 3\eta_1^2(r) - 3\eta_2^2(r) + A_2(r) + 2\eta_1(r)A_1(r)$$

$$L(r) = 6i\eta_1(r)\eta_2(r) + 2\eta_2(r)A_1(r)$$

$$M(r) = \eta_1^2(r)A_1'(r) - \eta_2^2(r)A_1'(r) + A_2'(r)\eta_1(r) + A_3'(r)$$

$$N(r) = 2i\eta_1(r)\eta_2(r)A_1'(r) + A_2'(r)i\eta_2(r)$$

maka Persamaan  $\frac{df(r)}{dr}$  dapat ditulis kembali seperti di bawah ini :

$$K(r)\eta_1'(r) + L(r)\eta_1'(r) + K(r)\eta_2'(r) - L(r)\eta_2'(r) + M(r) + N(r) = 0 \quad (4.28)$$

Dari Persamaan (4.28) dapat diubah menjadi 2 Persamaan yaitu :

$$K(r)\eta_1'(r) - L(r)\eta_2'(r) + M(r) = 0 \quad (4.29)$$

$$L(r)\eta_1'(r) + K(r)\eta_2'(r) + N(r) = 0 \quad (4.30)$$

Selanjutnya, mengalikan  $K(r)$  ke Persamaan (4.29) dan  $L(r)$  ke Persamaan (4.30) kemudian mengeliminasi Persamaan sehingga didapat sebagai berikut :

$$K^2(r)\eta_1'(r) - K(r)L(r)\eta_2'(r) + K(r)M(r) = 0$$

$$\frac{L^2(r)\eta_1'(r) + K(r)L(r)\eta_2'(r) + L(r)N(r) = 0}{K^2(r)\eta_1'(r) + L^2(r)\eta_1'(r) + K(r)M(r) + L(r)N(r) = 0} +$$

Setelah mengeliminasi Persamaan akan dicari  $\frac{dRe(\lambda_j(r))}{dr} \Big|_{r=r_c}$ ,

dimana  $\frac{dRe(\lambda_j(r))}{dr} \Big|_{r=r_c} = \eta_1'(r)$ , maka diperoleh

$$K^2(r)\eta_1'(r) + L^2(r)\eta_1'(r) + K(r)M(r) + L(r)N(r) = 0$$

$$(K^2(r) + L^2(r))\eta_1'(r) = -K(r)M(r) - L(r)N(r)$$

$$\eta_1'(r) = -\frac{K(r)M(r) + L(r)N(r)}{K^2(r) + L^2(r)}$$

Akan ditunjukkan bahwa  $K(r)M(r) + L(r)N(r) \neq 0$



$$K(r)M(r) + L(r)N(r) = (3\eta_1^2(r) - 3\eta_2^2(r) + A_2(r) + 2\eta_1(r)A_1(r))(\eta_1^2(r)A_1'(r) - \eta_2^2(r)A_1'(r) + A_2'(r)\eta_1(r) + A_3'(r)) + (6i\eta_1(r)\eta_2(r) + 2\eta_2(r)A_1(r))(2i\eta_1(r)\eta_2(r)A_1'(r) + A_2'(r)i\eta_2(r))$$

$$\begin{aligned} K(r)M(r) + L(r)N(r) &= 3\eta_1^4(r)A_1'(r) - 3\eta_2^2(r)\eta_1^2(r)A_1'(r) \\ &+ \eta_1^2(r)A_1'(r)A_2(r) + 2\eta_1^3(r)A_1'(r)A_1(r) \\ &- 3\eta_2^2(r)A_1'(r)\eta_1^2(r) + 3\eta_2^4(r)A_1'(r) - \eta_2^2(r)A_1'(r)A_2(r) \\ &- 2\eta_1(r)\eta_2^2(r)A_1'(r)A_1(r) + 3\eta_1^3(r)A_2'(r) \\ &- 3\eta_2^2(r)\eta_1(r)A_2'(r) + \eta_1(r)A_2'(r)A_2(r) + 2\eta_1^2(r)A_1(r)A_2'(r) \\ &+ 3\eta_1^2(r)A_3'(r) - 3\eta_2^2(r)A_3'(r) + A_2(r)A_3'(r) \\ &+ 2\eta_1(r)A_1(r)A_3'(r) - 12\eta_1^2(r)\eta_2^2(r)A_1'(r) \\ &+ 4\eta_1(r)\eta_2^2(r)A_1(r)A_1'(r)i - 6\eta_1(r)\eta_2^2(r)A_2'(r) \\ &+ 2i\eta_2^2(r)A_1(r)A_2'(r) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} K(r)M(r) + L(r)N(r) &= 3\eta_1^4(r)A_1'(r) + 3\eta_2^4(r)A_1'(r) - 3\eta_2^2(r)\eta_1^2(r)A_1'(r) \\ &- 3\eta_2^2(r)A_1'(r)\eta_1^2(r) + \eta_1^2(r)A_1'(r)A_2(r) - \eta_2^2(r)A_1'(r)A_2(r) \\ &- 2\eta_1^3(r)A_1'(r)A_1(r) + 3\eta_1^3(r)A_2'(r) + 3\eta_1^2(r)A_3'(r) \\ &- 3\eta_2^2(r)A_3'(r) - 2\eta_1(r)\eta_2^2(r)A_1'(r)A_1(r) \\ &+ 4\eta_1(r)\eta_2^2(r)A_1(r)A_1'(r)i - 3\eta_2^2(r)\eta_1(r)A_2'(r) \\ &- 6\eta_1(r)\eta_2^2(r)A_2'(r) + 2\eta_1(r)A_1(r)A_3'(r) + \eta_1(r)A_2'(r)A_2(r) \\ &+ 2\eta_1^2(r)A_1(r)A_2'(r) - 12\eta_1^2(r)\eta_2^2(r)A_1'(r) \\ &+ 2i\eta_2^2(r)A_1(r)A_2'(r) + A_2(r)A_3'(r) \end{aligned}$$

didapat,

$$\begin{aligned}
& K(r)M(r) + L(r)N(r) \\
&= (3\eta_1^4(r) + 3\eta_2^4(r))A_1'(r) - 18(\eta_2^2(r)\eta_1^2(r))A_1'(r) \\
&+ (\eta_1^2 - \eta_2^2(r))(A_1'(r)A_2(r) + 3A_3'(r)) \\
&- \eta_1^3(r)(2A_1'(r)A_1(r) + 3A_2'(r)) \\
&- 2\eta_1(r)\eta_2^2(r)(A_1'(r)A_1(r) - 2A_1(r)A_1'(r)i + 3A_2'(r)) \\
&+ \eta_1(r)(2A_1(r)A_3'(r) + A_2'(r)A_2(r)) \\
&+ 2(\eta_1^2(r) + i\eta_2^2)A_1(r)A_2'(r) + A_2(r)A_3'(r)
\end{aligned}$$

Selanjutnya, dibuktikan bahwa  $A_1' \neq 0$

$$\begin{aligned}
& A_1' \\
&= \frac{d}{dr} \left( -r + \frac{2rs^*}{K} + \frac{ri^*}{K} + \lambda i^* + \frac{\theta_1 p^*(i^* + d)}{(ms^* + d + i^*)^2} + \frac{rs^*}{K} + \lambda s^* \right. \\
&\quad \left. + \frac{\theta_1 s^* p^*}{(ms^* + d + i^*)^2} \right) \\
& A_1' = -1 + \frac{2s^*}{K} + \frac{i^*}{K} + \frac{s^*}{K} = -1 + \frac{3s^* + i^*}{K} \neq 0
\end{aligned}$$

Dimana  $A_1'(r) \neq 0$  dan  $r = r_c$  sehingga  $K(r_c)M(r_c) + L(r_c)N(r_c) \neq 0$ . Sehingga  $\frac{dRe(\lambda_j(r))}{dr} \Big|_{r=r_c} \neq 0$  dan  $\lambda_3 = -A_1(r) \neq 0$ . Berdasarkan pembuktian syarat transversal maka dapat disimpulkan bahwa bifurkasi Hopf terjadi pada  $r = r_c$ . Selanjutnya diselidiki kestabilan titik kesetimbangan dengan parameter  $K = 80$ ,  $\lambda = 0.8$ ,  $\theta_1 = 1.2$ ,  $m_1 = 3.1$ ,  $m = 3.1$ ,  $d = 5$ ,  $\mu = 2.98$ ,  $\theta_2 = 4.45$ ,  $m_2 = 3.25$ ,  $\mu_1 = 1.28$ ,  $r = 2.07362453344$  menggunakan perhitungan numerik, diperoleh

1. Titik Kesetimbangan Trivial  $E_0(0, 0, 0)$

$$\lambda_{1_{E_0}} = 2.0736245334 > 0, \quad \lambda_{2_{E_0}} = -2.98 < 0,$$

$$\lambda_{3_{E_0}} = -1.28 < 0$$

Karena nilai eigen  $\lambda_{1E_0} > 0$  maka  $E_0$  tidak stabil.

## 2. Titik Keseimbangan Bebas Penyakit

$$E_1(K, 0, 0) = E_1(80, 0, 0)$$

$$\lambda_{1E_1} = -2.07362453344 < 0$$

$$\lambda_{2E_1} = 61.02 > 0$$

$$\lambda_{3E_1} = 0.1271146245 > 0$$

Karena nilai eigen  $\lambda_{2E_1}, \lambda_{3E_1} > 0$  maka  $E_1$  tidak stabil.

## 3. Titik Keseimbangan Bebas Predator

$$E_2(3.725, 2.393779853, 0)$$

$$\lambda_{1E_2} = -0.04827657117 + 2.426796679i$$

$$\lambda_{2E_2} = -0.04827657117 - 2.426796679i$$

$$\lambda_{3E_2} = 0.005870580703$$

Karena nilai eigen  $\lambda_{3E_2} > 0$  maka  $E_2$  tidak stabil.

## 4. Titik Keseimbangan Planar

$$E_3(13.2780083, 0, 66.52898038)$$

$$\lambda_{1E_3} = 8.3225974$$

$$\lambda_{2E_3} = -3819.017326$$

$$\lambda_{3E_3} = -65.43019$$

Karena nilai eigen  $\lambda_{1E_3} > 0$  maka  $E_3$  tidak stabil.

## 5. Titik Keseimbangan Non Trivial

$$E_4(s^*, i^*, p^*)$$

$$= E_4(4.074153781, 2.51907552, 1.791432297)$$

$$A_1 = 0.00532769271 > 0$$

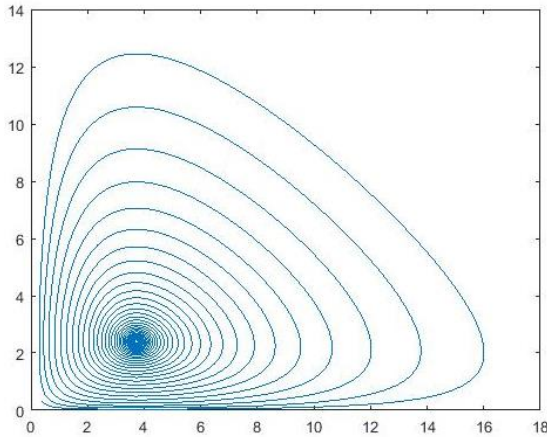
$$A_2 = 6.026727653 > 0$$

$$A_1 A_2 - A_3 = 0.0148816421 > 0$$

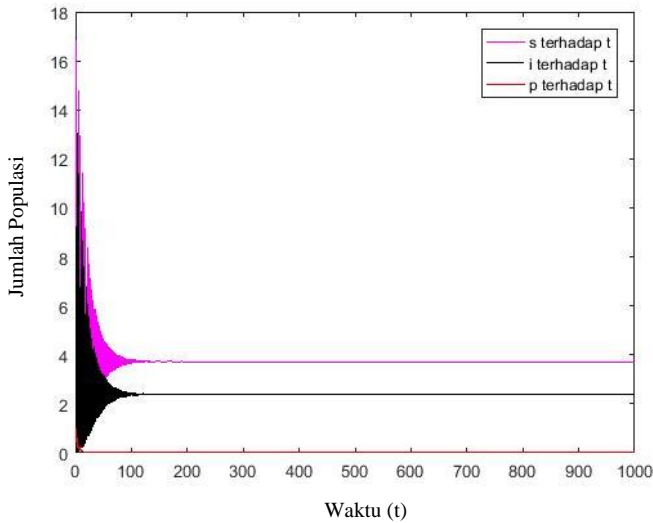
$$A_1'(r) = -0.8157560432 \neq 0$$

Dengan terbuktinya kriteria Routh-Hurwitz maka  $E_4$  stabil asimtotis. Dari perhitungan di atas diketahui bahwa  $A_1'(r) \neq 0$

sehingga  $\frac{dRe(\lambda_j(r))}{dr} \Big|_{r=r_c} \neq 0$  dan dianggap bahwa  $A_1 A_2 - A_3 \approx 0$ . Hal ini menunjukkan bahwa pada  $E_4$  terjadi bifurkasi Hopf. Dari perhitungan numerik di atas diketahui bahwa bifurkasi Hopf juga terjadi pada titik kesetimbangan  $E_2$  karena terdapatnya nilai eigen yang mempunyai sepasang bilangan imajiner dengan nilai eigen lainnya negatif. Selanjutnya akan diselidiki eksistensi bifurkasi Hopf dengan menggunakan simulasi numerik.



Gambar 4.2 Orbit Periodik 2D Model Eko-Epidemiologi dengan Respon Fungsional Holling Tipe II



Gambar 4.3 Plot Terhadap Waktu

Berdasarkan Gambar 4.2 terlihat adanya orbit periodik dengan arah menuju ke limit cycle pada nilai  $r = 2.07362453344$ , Selanjutnya berdasarkan Gambar 4.4 terlihat bahwa dinamika pertumbuhan *Susceptible* dan *Infected* secara terus menerus turun secara fluktuatif dan pada waktu ke 100 konstan menuju titik tertentu, sedangkan jumlah populasi predator konstan mendekati titik 0. Hal ini menunjukkan bahwa terjadi penyebaran penyakit secara terus menerus.

#### 4.13 Simulasi Numerik

Pada subbab ini akan membahas bagaimana cara untuk memperoleh eh solusi numerik dari Persamaan model interaksi dinamis dan simulasi numeriknya. Hal ini bertujuan untuk memudahkan dalam menganalisis model.

Penyelesaian numerik yang digunakan adalah metode Runge-Kutta orde 4. Metode Runge-Kutta mencapai keakuratan dari suatu pendekatan Taylor tanpa memerlukan turunan-turunan tingkat tinggi. Metode Runge-Kutta orde empat adalah salah satu metode yang banyak digunakan untuk menyelesaikan Persamaan differensial. Metode ini mempunyai suatu galat pemotogan  $h^4$ , dengan  $h$  merupakan langkah waktu (*step size*).

Sebelumnya dimisalkan nilai awal untuk sistem Persamaan (4.1)

$$s(t_0) = s_0$$

$$i(t_0) = i_0$$

$$p(t_0) = p_0$$

dan dengan menggunakan Metode Runge-Kutta orde empat diperoleh integrasi numerik sebagai berikut :

$$s_{n+1} = s_n + \frac{1}{6}(k_{1,s} + 2k_{2,s} + 2k_{3,s} + k_{4,s})$$

$$i_{n+1} = i_n + \frac{1}{6}(k_{1,i} + 2k_{2,i} + 2k_{3,i} + k_{4,i})$$

$$p_{n+1} = p_n + \frac{1}{6}(k_{1,p} + 2k_{2,p} + 2k_{3,p} + k_{4,p})$$

dengan

$$\begin{aligned} k_{1,s} &= hf(t_n, s_n, i_n, p_n) \\ &= h \left( rs_n \left( 1 - \frac{s_n + i_n}{K} \right) - \lambda s_n i_n - \frac{\theta_1 s_n p_n}{m s_n + i_n + d} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} k_{1,i} &= hf(t_n, s_n, i_n, p_n) \\ &= h \left( \lambda s_n i_n - \frac{m_1 i_n p_n}{m s_n + i_n + d} - \mu i_n \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
k_{1,p} &= hf(t_n, s_n, i_n, p_n) \\
&= h \left( \frac{\theta_2 s_n p_n}{m s_n + i_n + d} + \frac{m_2 i_n p_n}{m s_n + i_n + d} - \mu_1 p_n \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
k_{2,s} &= hf \left( t_n + \frac{h}{2}, s_n + \frac{h}{2}, i_n + \frac{h}{2}, p_n + \frac{h}{2} \right) \\
&= h \left( r \left( s_n + \frac{h}{2} \right) \left( 1 - \frac{\left( s_n + \frac{h}{2} \right) + \left( i_n + \frac{h}{2} \right)}{K} \right) - \lambda \left( s_n + \frac{h}{2} \right) \left( i_n + \frac{h}{2} \right) \right. \\
&\quad \left. - \frac{\theta_1 \left( s_n + \frac{h}{2} \right) \left( p_n + \frac{h}{2} \right)}{m \left( s_n + \frac{h}{2} \right) + \left( i_n + \frac{h}{2} \right) + d} \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
k_{2,i} &= hf \left( t_n + \frac{h}{2}, s_n + \frac{h}{2}, i_n + \frac{h}{2}, p_n + \frac{h}{2} \right) \\
&= h \left( \lambda \left( s_n + \frac{h}{2} \right) \left( i_n + \frac{h}{2} \right) - \frac{m_1 \left( i_n + \frac{h}{2} \right) \left( p_n + \frac{h}{2} \right)}{m \left( s_n + \frac{h}{2} \right) + \left( i_n + \frac{h}{2} \right) + d} \right. \\
&\quad \left. - \mu \left( i_n + \frac{h}{2} \right) \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
k_{2,p} &= hf \left( t_n + \frac{h}{2}, s_n + \frac{h}{2}, i_n + \frac{h}{2}, p_n + \frac{h}{2} \right) \\
&= h \left( \frac{\theta_2 \left( s_n + \frac{h}{2} \right) \left( p_n + \frac{h}{2} \right)}{m \left( s_n + \frac{h}{2} \right) + \left( i_n + \frac{h}{2} \right) + d} + \frac{m_2 \left( i_n + \frac{h}{2} \right) \left( p_n + \frac{h}{2} \right)}{m \left( s_n + \frac{h}{2} \right) + \left( i_n + \frac{h}{2} \right) + d} \right. \\
&\quad \left. - \mu_1 \left( p_n + \frac{h}{2} \right) \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
k_{3,s} &= hf\left(t_n + \frac{h}{2}, s_n + \frac{k_{2,s}}{2}, i_n + \frac{k_{2,i}}{2}, p_n + \frac{k_{2,p}}{2}\right) \\
&= h\left(r\left(s_n + \frac{k_{2,s}}{2}\right)\left(1 - \frac{\left(s_n + \frac{k_{2,s}}{2}\right) + \left(i_n + \frac{k_{2,i}}{2}\right)}{K}\right)\right. \\
&\quad \left.- \lambda\left(s_n + \frac{k_{2,s}}{2}\right)\left(i_n + \frac{k_{2,i}}{2}\right) - \frac{\theta_1\left(s_n + \frac{k_{2,s}}{2}\right)\left(p_n + \frac{k_{2,p}}{2}\right)}{m\left(s_n + \frac{k_{2,s}}{2}\right) + \left(i_n + \frac{k_{2,i}}{2}\right) + d}\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
k_{3,i} &= hf\left(t_n + \frac{h}{2}, s_n + \frac{k_{2,s}}{2}, i_n + \frac{k_{2,i}}{2}, p_n + \frac{k_{2,p}}{2}\right) \\
&= h\left(\lambda\left(s_n + \frac{k_{2,s}}{2}\right)\left(i_n + \frac{k_{2,i}}{2}\right) - \frac{m_1\left(i_n + \frac{k_{2,i}}{2}\right)\left(p_n + \frac{k_{2,p}}{2}\right)}{m\left(s_n + \frac{k_{2,s}}{2}\right) + \left(i_n + \frac{k_{2,i}}{2}\right) + d}\right. \\
&\quad \left.- \mu\left(i_n + \frac{k_{2,i}}{2}\right)\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
k_{3,p} &= hf\left(t_n + \frac{h}{2}, s_n + \frac{k_{2,s}}{2}, i_n + \frac{k_{2,i}}{2}, p_n + \frac{k_{2,p}}{2}\right) \\
&= h\left(\frac{\theta_2\left(s_n + \frac{k_{2,s}}{2}\right)\left(p_n + \frac{k_{2,p}}{2}\right)}{m\left(s_n + \frac{k_{2,s}}{2}\right) + \left(i_n + \frac{k_{2,i}}{2}\right) + d} + \frac{m_2\left(i_n + \frac{k_{2,i}}{2}\right)\left(p_n + \frac{k_{2,p}}{2}\right)}{m\left(s_n + \frac{k_{2,s}}{2}\right) + \left(i_n + \frac{k_{2,i}}{2}\right) + d}\right. \\
&\quad \left.- \mu_1\left(p_n + \frac{h}{2}\right)\right)
\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
k_{4,s} &= hf(t_n, s_n + k_{3,s}, i_n + k_{2,i}, p_n + k_{2,p}) \\
&= h \left( r(s_n + k_{3,s}) \left( 1 - \frac{(s_n + k_{3,s}) + (i_n + k_{2,i})}{K} \right) \right. \\
&\quad \left. - \lambda(s_n + k_{3,s})(i_n + k_{2,i}) - \frac{\theta_1(s_n + k_{3,s})(p_n + k_{2,p})}{m(s_n + k_{3,s}) + (i_n + k_{2,i}) + d} \right)
\end{aligned}$$

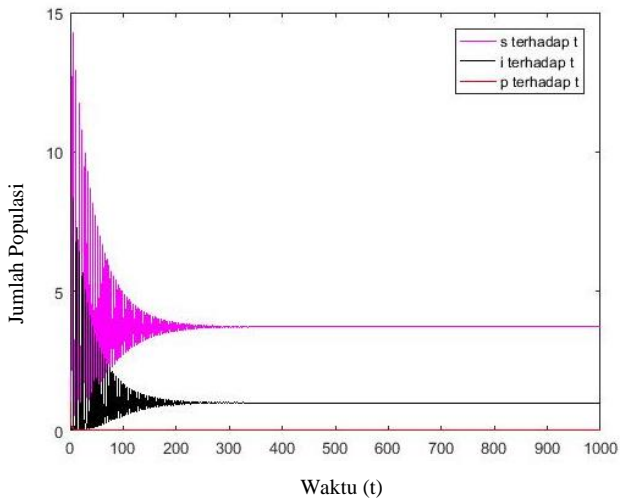
$$\begin{aligned}
k_{4,i} &= hf(t_n, s_n + k_{3,s}, i_n + k_{2,i}, p_n + k_{2,p}) \\
&= h \left( \lambda(s_n + k_{3,s})(i_n + k_{2,i}) - \frac{m_1(i_n + k_{2,i})(p_n + k_{2,p})}{m(s_n + k_{3,s}) + (i_n + k_{2,i}) + d} \right. \\
&\quad \left. - \mu(i_n + k_{2,i}) \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
k_{4,p} &= hf(t_n, s_n + k_{3,s}, i_n + k_{2,i}, p_n + k_{2,p}) \\
&= h \left( \frac{\theta_2(s_n + k_{3,s})(p_n + k_{2,p})}{m(s_n + k_{3,s}) + (i_n + k_{2,i}) + d} \right. \\
&\quad \left. + \frac{m_2(i_n + k_{2,i})(p_n + k_{2,p})}{m(s_n + k_{3,s}) + (i_n + k_{2,i}) + d} - \mu_1(p_n + k_{2,p}) \right)
\end{aligned}$$

Selanjutnya dengan program MATLAB diselidiki hubungan antara bilangan pertumbuhan intrinsik populasi prey yang rentan ( $r$ ) dengan kestabilan titik kesetimbangan sehingga diperoleh

1. Analisis Kestabilan Titik Kesetimbangan ketika pertumbuhan intrinsik populasi prey yang rentan  $r < 2.07362453344$

Dengan menggunakan parameter yang berasal dari [1],  $K = 80$ ,  $\lambda = 0.8$ ,  $\theta_1 = 1.2$ ,  $m_1 = 3.1$ ,  $m = 3.1$ ,  $d = 5$ ,  $\mu = 2.98$ ,  $\theta_2 = 4.45$ ,  $m_2 = 3.25$ ,  $\mu_1 = 1.28$ , dan  $r = 0.85$ . Selanjutnya melakukan simulasi dengan menggunakan parameter di atas dan dengan nilai awal dari populasi  $s(0) = 10$ ,  $i(0) = 9$ , dan  $p(0) = 8$  sehingga diperoleh



Gambar 4.4 Plot Terhadap Waktu pada Saat  $r = 0.85$

#### Laju Perubahan pada Populasi *Susceptible*

Berdasarkan Gambar 4.4 terlihat nilai awal populasi *Susceptible* terus menurun hingga stabil pada nilai mendekati 3.725 seiring bertambahnya waktu ( $t$ ).

#### Laju Perubahan pada Populasi *Infected*

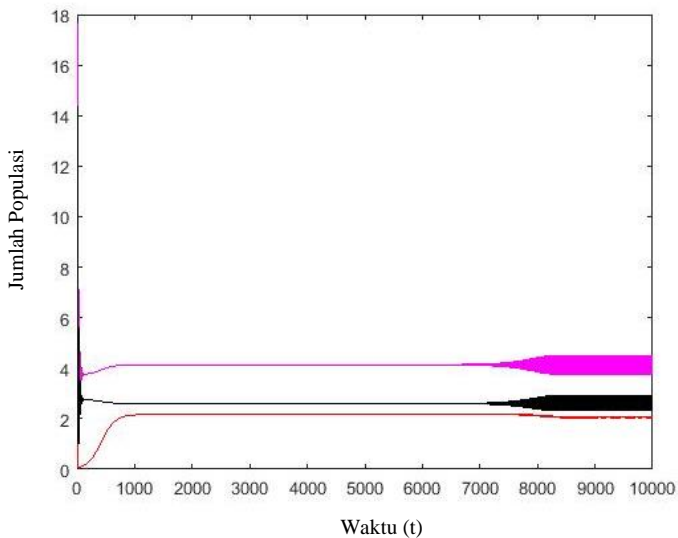
Berdasarkan Gambar 4.4 terlihat nilai awal populasi *Infected* terus menurun hingga stabil pada nilai mendekati 2.393779853 seiring bertambahnya waktu ( $t$ ).

### Laju Perubahan pada Populasi Predato

Berdasarkan Gambar 4.4 terlihat populasi predator stabil mendekati nilai 0.

2. Analisis Kestabilan Titik Keseimbangan ketika pertumbuhan intrinsik populasi prey yang rentan  $r > 2.07362453344$

Dengan menggunakan parameter yang berasal dari [1],  $K = 80$ ,  $\lambda = 0.8$ ,  $\theta_1 = 1.2$ ,  $m_1 = 3.1$ ,  $m = 3.1$ ,  $d = 5$ ,  $\mu = 2.98$ ,  $\theta_2 = 4.45$ ,  $m_2 = 3.25$ ,  $\mu_1 = 1.28$ , dan  $r = 2.41$ . Selanjutnya melakukan simulasi dengan menggunakan parameter di atas dan dengan nilai awal dari populasi  $s(0) = 10$ ,  $i(0) = 9$ , dan  $p(0) = 8$  sehingga diperoleh



Gambar 4.5 Plot Terhadap pada Saat  $r = 2.41$

Laju Perubahan pada Populasi *Susceptible*

Berdasarkan Gambar 4.5 terlihat bahwa populasi *Susceptible* stabil mendekati nilai 4.074153781 dan mulai berosilasi lagi seiring dengan bertambahnya waktu ( $t$ ).

Laju Perubahan pada Populasi *Infected*

Berdasarkan Gambar 4.5 terlihat bahwa populasi *Infected* stabil mendekati nilai 2.51907552 dan mulai berosilasi seiring dengan bertambahnya waktu ( $t$ ).

Laju Perubahan pada Populasi Predator

Berdasarkan Gambar 4.5 terlihat bahwa populasi Predator stabil mendekati nilai 1.79143229 dan mulai berosilasi lagi seiring dengan bertambahnya waktu ( $t$ ).

Pada Gambar 4.4 kestabilan menuju titik kesetimbangan bebas predator  $E_2$  akan tetapi pada Gambar 4.5 terlihat bahwa kestabilan menuju titik kesetimbangan non trivial  $E_4$ , hal ini menunjukkan bahwa  $E_4$  tidak stabil asimtotis ketika  $r = 2.41$ .

## **BAB V**

### **KESIMPULAN DAN SARAN**

Bab ini berisi kesimpulan yang diperoleh dari pembahasan masalah sebelumnya serta saran yang diberikan untuk pengembangan selanjutnya

#### **5.1 Kesimpulan**

Berdasarkan keseluruhan hasil analisis dapat disimpulkan bahwa

1. Titik kesetimbangan trivial  $E_0(0,0,0)$ ,  $E_1(K, 0,0)$ ,  $E_2(\bar{s}, \bar{i}, 0)$ , dan  $E_3(\bar{s}, 0, \bar{p})$  tidak stabil, sedangkan titik kesetimbangan  $E_4(s^*, i^*, p^*)$  stabil asimtotis.
2. Bifurkasi Hopf terjadi pada titik kesetimbangan  $E_2$  dan  $E_4$  dimana ketika  $r = r_c = 2.07362453344$
3. Dengan metode Runge-Kutta orde 4 menggunakan *software* MATLAB diperoleh hasil sebagai berikut :
  - Jika  $0 < r \leq 2.07362453344$ , maka terjadi keadaan bebas predator karena kestabilan sistem menuju titik kesetimbangan bebas predator
  - Jika  $2.07362453344 < r < 2.41$ , maka penyakit menjadi endemik karena kestabilan sistem menuju titik kesetimbangan non trivial. Pada titik  $r = 2.41$  sistem mulai tidak stabil.

#### **5.2 Saran**

Perlu dikembangkan lagi model eko-epidemiologi dengan respon fungsional Holling tipe II dengan mencari jenis bifurkasi Hopf yaitu subkritikal atau superkritikal.

*” Halaman sengaja dikosongkan ”*

## DAFTAR PUSTAKA

- [1] Upadhyay RK, Paramita R. (2014). "*Spread of Disease and Its Effect on Population Dynamics in an Eco-Epidemiological System*". India
- [2] Ripno JI. (2012). "*Pemodelan Matematika*". Yogyakarta. Erlangga.
- [3] Edwards CH, Penney DE. (2008). "*Elementary Differential Equations*". 6th Ed. News Jersey: Pearson Education.
- [4] Holling, CS.(1959). "*Some Characteristic of Simple Type of Predation and Parasitism*". The Canadian Entomology. Vol.XCL. No 7. Ottawa: Canada.
- [5] Yaseen RM. (2012). "*On The Dynamics of Some Eco-Epidemiology Models*". College of Science, University of Baghdad Iraq.
- [6] Su M, Wang H. (2015). "*Modeling at The Interface of Ecology and Epidemiology*". School of Mathematics, Hafei University of Technology China.
- [7] Upadhyay RK, Bairagi N, Kundu K, Chattopadhyay J. (2008). "*Chaos in Eco-Epidemiological Problem of The Salton Sea and Its Possible Control*". Appl Math Comp.
- [8] Aidila, Fatazia. (2016). "*Analisis Kualitataif pada Model SIR dengan Fungsi Pengobatan Saturasi*". Tugas Akhir S1 Jurusan Matematika ITS Surabaya.
- [9] Dubey, B. (2012). "*A Predator-Prey Model with A Reserved Area, Mathematics Grouph, Jurnal Modeling and Control*".
- [10] Nara. (2014). "*Analisa Kualitatif pada Model Penyakit Parasitosis*". Tugas Akhir S1 Jurusan Matematika ITS Surabaya.
- [11] Subiono. (2016). "*Sistem Linier dan Kontrol Optimal*". Jurusan Matematika ITS Surabaya.

- [12] Liu, W. (1994). "*Criterion of Hopf Bifurcation without Using Eigen Values*". Indiana.
- [13] Perko L. (2001). "*Differential Equations and Dynamical System*", *Third Edition*.. USA.
- [14] Boyce WE, Diprima RC. (2001). "*Elementary Differential Equation and Boundary Value Problem*". Erlangga, Seventh Edition.
- [15] Aisyah N, Winarko S. (2012). "*Buku Ajar Pesamaan Differensial Biasa*". Surabaya
- [16] Anton, H. (1987). "*Aljabar Linear Elementer*". Erlangga, edisi 7 jilid 1.



## LAMPIRAN A

Listing Program Kurva Kestabilan dan Bifurkasi Hopf pada Model Eko-Epidemiologi dengan Respon Fungsional Holling tipe II

- M File dengan Judul **Bifurkasihopfgui.m**

```
function varargout =  
Bifurkasihopfgui(varargin)  
% BIFURKASIHOPFGUI M-file for  
Bifurkasihopfgui.fig  
%     BIFURKASIHOPFGUI, by itself,  
creates a new BIFURKASIHOPFGUI or raises  
the existing  
%     singleton*.  
%  
%     H = BIFURKASIHOPFGUI returns the  
handle to a new BIFURKASIHOPFGUI or the  
handle to  
%     the existing singleton*.  
%  
%  
BIFURKASIHOPFGUI('CALLBACK', hObject,eventD  
ata,handles,...) calls the local  
%     function named CALLBACK in  
BIFURKASIHOPFGUI.M with the given input  
arguments.  
%  
%  
BIFURKASIHOPFGUI('Property','Value',...)  
creates a new BIFURKASIHOPFGUI or raises  
the  
%     existing singleton*. Starting from  
the left, property value pairs are
```

## Lanjutan Lampiran A

```
%      applied to the GUI before
Bifurkasihopfgui_OpeningFcn gets called.
An
%      unrecognized property name or
invalid value makes property application
%      stop. All inputs are passed to
Bifurkasihopfgui_OpeningFcn via varargin.
%
%      *See GUI Options on GUIDE's Tools
menu. Choose "GUI allows only one
%      instance to run (singleton)".
%
% See also: GUIDE, GUIDATA, GUIHANDLES

% Edit the above text to modify the
response to help Bifurkasihopfgui

% Last Modified by GUIDE v2.5 04-Jun-2017
23:13:56

% Begin initialization code - DO NOT EDIT
gui_Singleton = 1;
gui_State = struct('gui_Name',
mfilename, ...
                  'gui_Singleton',
gui_Singleton, ...
                  'gui_OpeningFcn',
@Bifurkasihopfgui_OpeningFcn, ...
                  'gui_OutputFcn',
@Bifurkasihopfgui_OutputFcn, ...
                  'gui_LayoutFcn', [] ,
...
                  'gui_Callback', []);
if nargin && ischar(varargin{1})
```

## Lanjutan Lampiran A

```

        gui_State.gui_Callback =
str2func(varargin{1});
end

if nargin
    [varargout{1:nargout}] =
gui_mainfcn(gui_State, varargin{:});
else
    gui_mainfcn(gui_State, varargin{:});
end
% End initialization code - DO NOT EDIT
% --- Executes just before
Bifurkasihopfgui is made visible.
function
Bifurkasihopfgui_OpeningFcn(hObject,
eventdata, handles, varargin)
% This function has no output args, see
OutputFcn.
% hObject    handle to figure
% eventdata  reserved - to be defined in a
future version of MATLAB
% handles     structure with handles and
user data (see GUIDATA)
% varargin    command line arguments to
Bifurkasihopfgui (see VARARGIN)

% Choose default command line output for
Bifurkasihopfgui
handles.output = hObject;

% Update handles structure
guidata(hObject, handles);

```

## Lanjutan Lampiran A

```
% UIWAIT makes Bifurkasihopfgui wait for
user response (see UIRESUME)
% uiwait(handles.figure1);

% --- Outputs from this function are
returned to the command line.
function varargout =
Bifurkasihopfgui_OutputFcn(hObject,
eventdata, handles)
% varargout    cell array for returning
output args (see VARARGOUT);
% hObject      handle to figure
% eventdata    reserved - to be defined in a
future version of MATLAB
% handles       structure with handles and
user data (see GUIDATA)

% Get default command line output from
handles structure
varargout{1} = handles.output;

function edit3_Callback(hObject,
eventdata, handles)
% hObject      handle to edit3 (see GCBO)
% eventdata    reserved - to be defined in a
future version of MATLAB
% handles       structure with handles and
user data (see GUIDATA)

% Hints: get(hObject,'String') returns
contents of edit3 as text
%           str2double(get(hObject,'String'))
returns contents of edit3 as a double
```

## Lanjutan Lampiran A

```
% --- Executes during object creation,
after setting all properties.
function edit3_CreateFcn(hObject,
eventdata, handles)
% hObject    handle to edit3 (see GCBO)
% eventdata  reserved - to be defined in a
future version of MATLAB
% handles     empty - handles not created
until after all CreateFcns called

% Hint: edit controls usually have a white
background on Windows.
%         See ISPC and COMPUTER.
if ispc &&
isequal(get(hObject,'BackgroundColor'),
get(0,'defaultUiControlBackgroundColor'))

set(hObject,'BackgroundColor','white');
end

function edit4_Callback(hObject,
eventdata, handles)
% hObject    handle to edit4 (see GCBO)
% eventdata  reserved - to be defined in a
future version of MATLAB
% handles     structure with handles and
user data (see GUIDATA)

% Hints: get(hObject,'String') returns
contents of edit4 as text
%         str2double(get(hObject,'String'))
returns contents of edit4 as a double
```

### Lanjutan Lampiran A

```
% --- Executes during object creation,
after setting all properties.
function edit4_CreateFcn(hObject,
eventdata, handles)
% hObject    handle to edit4 (see GCBO)
% eventdata  reserved - to be defined in a
future version of MATLAB
% handles    empty - handles not created
until after all CreateFcns called

% Hint: edit controls usually have a white
background on Windows.
%         See ISPC and COMPUTER.
if ispc &&
isequal(get(hObject,'BackgroundColor'),
get(0,'defaultUiControlBackgroundColor'))

set(hObject,'BackgroundColor','white');
end

function edit5_Callback(hObject,
eventdata, handles)
% hObject    handle to edit5 (see GCBO)
% eventdata  reserved - to be defined in a
future version of MATLAB
% handles    structure with handles and
user data (see GUIDATA)

% Hints: get(hObject,'String') returns
contents of edit5 as text
%         str2double(get(hObject,'String'))
returns contents of edit5 as a double
```

## Lanjutan Lampiran A

```
% --- Executes during object creation,
after setting all properties.
function edit5_CreateFcn(hObject,
eventdata, handles)
% hObject    handle to edit5 (see GCBO)
% eventdata  reserved - to be defined in a
future version of MATLAB
% handles     empty - handles not created
until after all CreateFcns called

% Hint: edit controls usually have a white
background on Windows.
%         See ISPC and COMPUTER.
if ispc &&
isequal(get(hObject,'BackgroundColor'),
get(0,'defaultUiControlBackgroundColor'))

set(hObject,'BackgroundColor','white');
end

function edit6_Callback(hObject,
eventdata, handles)
% hObject    handle to edit6 (see GCBO)
% eventdata  reserved - to be defined in a
future version of MATLAB
% handles     structure with handles and
user data (see GUIDATA)

% Hints: get(hObject,'String') returns
contents of edit6 as text
%         str2double(get(hObject,'String'))
returns contents of edit6 as a double
```

### Lanjutan Lampiran A

```
% --- Executes during object creation,
after setting all properties.
function edit6_CreateFcn(hObject,
eventdata, handles)
% hObject    handle to edit6 (see GCBO)
% eventdata  reserved - to be defined in a
future version of MATLAB
% handles    empty - handles not created
until after all CreateFcns called

% Hint: edit controls usually have a white
background on Windows.
%         See ISPC and COMPUTER.
if ispc &&
isequal(get(hObject,'BackgroundColor'),
get(0,'defaultUiControlBackgroundColor'))

set(hObject,'BackgroundColor','white');
end

function edit7_Callback(hObject,
eventdata, handles)
% hObject    handle to edit7 (see GCBO)
% eventdata  reserved - to be defined in a
future version of MATLAB
% handles    structure with handles and
user data (see GUIDATA)

% Hints: get(hObject,'String') returns
contents of edit7 as text
%         str2double(get(hObject,'String'))
returns contents of edit7 as a double
```



## Lanjutan Lampiran A

```
% --- Executes during object creation,
after setting all properties.
function edit7_CreateFcn(hObject,
eventdata, handles)
% hObject    handle to edit7 (see GCBO)
% eventdata  reserved - to be defined in a
future version of MATLAB
% handles    empty - handles not created
until after all CreateFcns called

% Hint: edit controls usually have a white
background on Windows.
%         See ISPC and COMPUTER.
if ispc &&
isequal(get(hObject,'BackgroundColor'),
get(0,'defaultUiControlBackgroundColor'))

set(hObject,'BackgroundColor','white');
end

function edit8_Callback(hObject,
eventdata, handles)
% hObject    handle to edit8 (see GCBO)
% eventdata  reserved - to be defined in a
future version of MATLAB
% handles    structure with handles and
user data (see GUIDATA)

% Hints: get(hObject,'String') returns
contents of edit8 as text
%         str2double(get(hObject,'String'))
returns contents of edit8 as a double
```

### Lanjutan Lampiran A

```
% --- Executes during object creation,
after setting all properties.
function edit8_CreateFcn(hObject,
eventdata, handles)
% hObject    handle to edit8 (see GCBO)
% eventdata  reserved - to be defined in a
future version of MATLAB
% handles     empty - handles not created
until after all CreateFcns called

% Hint: edit controls usually have a white
background on Windows.
%         See ISPC and COMPUTER.
if ispc &&
isequal(get(hObject,'BackgroundColor'),
get(0,'defaultUiControlBackgroundColor'))

set(hObject,'BackgroundColor','white');
end

function edit9_Callback(hObject,
eventdata, handles)
% hObject    handle to edit9 (see GCBO)
% eventdata  reserved - to be defined in a
future version of MATLAB
% handles     structure with handles and
user data (see GUIDATA)

% Hints: get(hObject,'String') returns
contents of edit9 as text
%         str2double(get(hObject,'String'))
returns contents of edit9 as a double
```

## Lanjutan Lampiran A

```
% --- Executes during object creation,
after setting all properties.
function edit9_CreateFcn(hObject,
eventdata, handles)
% hObject    handle to edit9 (see GCBO)
% eventdata  reserved - to be defined in a
future version of MATLAB
% handles     empty - handles not created
until after all CreateFcns called

% Hint: edit controls usually have a white
background on Windows.
%         See ISPC and COMPUTER.
if ispc &&
isequal(get(hObject,'BackgroundColor'),
get(0,'defaultUiControlBackgroundColor'))

set(hObject,'BackgroundColor','white');
end

function edit10_Callback(hObject,
eventdata, handles)
% hObject    handle to edit10 (see GCBO)
% eventdata  reserved - to be defined in a
future version of MATLAB
% handles     structure with handles and
user data (see GUIDATA)

% Hints: get(hObject,'String') returns
contents of edit10 as text
%         str2double(get(hObject,'String'))
returns contents of edit10 as a double
```

### Lanjutan Lampiran A

```
% --- Executes during object creation,
after setting all properties.
function edit10_CreateFcn(hObject,
eventdata, handles)
% hObject    handle to edit10 (see GCBO)
% eventdata  reserved - to be defined in a
future version of MATLAB
% handles     empty - handles not created
until after all CreateFcns called

% Hint: edit controls usually have a white
background on Windows.
%         See ISPC and COMPUTER.
if ispc &&
isequal(get(hObject,'BackgroundColor'),
get(0,'defaultUiControlBackgroundColor'))

set(hObject,'BackgroundColor','white');
end

function edit11_Callback(hObject,
eventdata, handles)
% hObject    handle to edit11 (see GCBO)
% eventdata  reserved - to be defined in a
future version of MATLAB
% handles     structure with handles and
user data (see GUIDATA)

% Hints: get(hObject,'String') returns
contents of edit11 as text
%         str2double(get(hObject,'String'))
returns contents of edit11 as a double
```

## Lanjutan Lampiran A

```
% --- Executes during object creation,
after setting all properties.
function edit11_CreateFcn(hObject,
eventdata, handles)
% hObject    handle to edit11 (see GCBO)
% eventdata  reserved - to be defined in a
future version of MATLAB
% handles     empty - handles not created
until after all CreateFcns called

% Hint: edit controls usually have a white
background on Windows.
%         See ISPC and COMPUTER.
if ispc &&
isequal(get(hObject,'BackgroundColor'),
get(0,'defaultUiControlBackgroundColor'))

set(hObject,'BackgroundColor','white');
end

function edit12_Callback(hObject,
eventdata, handles)
% hObject    handle to edit12 (see GCBO)
% eventdata  reserved - to be defined in a
future version of MATLAB
% handles     structure with handles and
user data (see GUIDATA)

% Hints: get(hObject,'String') returns
contents of edit12 as text
%         str2double(get(hObject,'String'))
returns contents of edit12 as a double
```

### Lanjutan Lampiran A

```
% --- Executes during object creation,
after setting all properties.
function edit12_CreateFcn(hObject,
eventdata, handles)
% hObject    handle to edit12 (see GCBO)
% eventdata  reserved - to be defined in a
future version of MATLAB
% handles    empty - handles not created
until after all CreateFcns called

% Hint: edit controls usually have a white
background on Windows.
%         See ISPC and COMPUTER.
if ispc &&
isequal(get(hObject,'BackgroundColor'),
get(0,'defaultUiControlBackgroundColor'))

set(hObject,'BackgroundColor','white');
end

function edit13_Callback(hObject,
eventdata, handles)
% hObject    handle to edit13 (see GCBO)
% eventdata  reserved - to be defined in a
future version of MATLAB
% handles    structure with handles and
user data (see GUIDATA)

% Hints: get(hObject,'String') returns
contents of edit13 as text
%         str2double(get(hObject,'String'))
returns contents of edit13 as a double
```

## Lanjutan Lampiran A

```
% --- Executes during object creation,
after setting all properties.
function edit13_CreateFcn(hObject,
eventdata, handles)
% hObject    handle to edit13 (see GCBO)
% eventdata  reserved - to be defined in a
future version of MATLAB
% handles    empty - handles not created
until after all CreateFcns called

% Hint: edit controls usually have a white
background on Windows.
%         See ISPC and COMPUTER.
if ispc &&
isequal(get(hObject,'BackgroundColor'),
get(0,'defaultUiControlBackgroundColor'))

set(hObject,'BackgroundColor','white');
end

function edit14_Callback(hObject,
eventdata, handles)
% hObject    handle to edit14 (see GCBO)
% eventdata  reserved - to be defined in a
future version of MATLAB
% handles    structure with handles and
user data (see GUIDATA)

% Hints: get(hObject,'String') returns
contents of edit14 as text
%         str2double(get(hObject,'String'))
returns contents of edit14 as a double
```

### Lanjutan Lampiran A

```
% --- Executes during object creation,
after setting all properties.
function edit14_CreateFcn(hObject,
eventdata, handles)
% hObject    handle to edit14 (see GCBO)
% eventdata  reserved - to be defined in a
future version of MATLAB
% handles    empty - handles not created
until after all CreateFcns called

% Hint: edit controls usually have a white
background on Windows.
%         See ISPC and COMPUTER.
if ispc &&
isequal(get(hObject,'BackgroundColor'),
get(0,'defaultUiControlBackgroundColor'))

set(hObject,'BackgroundColor','white');
end

function edit15_Callback(hObject,
eventdata, handles)
% hObject    handle to edit15 (see GCBO)
% eventdata  reserved - to be defined in a
future version of MATLAB
% handles    structure with handles and
user data (see GUIDATA)

% Hints: get(hObject,'String') returns
contents of edit15 as text
%         str2double(get(hObject,'String'))
returns contents of edit15 as a double
```



## Lanjutan Lampiran A

```
% --- Executes during object creation,
after setting all properties.
function edit15_CreateFcn(hObject,
eventdata, handles)
% hObject    handle to edit15 (see GCBO)
% eventdata  reserved - to be defined in a
future version of MATLAB
% handles    empty - handles not created
until after all CreateFcns called

% Hint: edit controls usually have a white
background on Windows.
%         See ISPC and COMPUTER.
if ispc &&
isequal(get(hObject,'BackgroundColor'),
get(0,'defaultUiControlBackgroundColor'))

set(hObject,'BackgroundColor','white');
end

function edit16_Callback(hObject,
eventdata, handles)
% hObject    handle to edit16 (see GCBO)
% eventdata  reserved - to be defined in a
future version of MATLAB
% handles    structure with handles and
user data (see GUIDATA)

% Hints: get(hObject,'String') returns
contents of edit16 as text
%         str2double(get(hObject,'String'))
returns contents of edit16 as a double
```

### Lanjutan Lampiran A

```
% --- Executes during object creation,
after setting all properties.
function edit16_CreateFcn(hObject,
eventdata, handles)
% hObject    handle to edit16 (see GCBO)
% eventdata  reserved - to be defined in a
future version of MATLAB
% handles     empty - handles not created
until after all CreateFcns called

% Hint: edit controls usually have a white
background on Windows.
%         See ISPC and COMPUTER.
if ispc &&
isequal(get(hObject,'BackgroundColor'),
get(0,'defaultUiControlBackgroundColor'))

set(hObject,'BackgroundColor','white');
end

function edit17_Callback(hObject,
eventdata, handles)
% hObject    handle to edit17 (see GCBO)
% eventdata  reserved - to be defined in a
future version of MATLAB
% handles     structure with handles and
user data (see GUIDATA)

% Hints: get(hObject,'String') returns
contents of edit17 as text
%         str2double(get(hObject,'String'))
returns contents of edit17 as a double
```

## Lanjutan Lampiran A

```
% --- Executes during object creation,
after setting all properties.
function edit17_CreateFcn(hObject,
eventdata, handles)
% hObject    handle to edit17 (see GCBO)
% eventdata  reserved - to be defined in a
future version of MATLAB
% handles     empty - handles not created
until after all CreateFcns called

% Hint: edit controls usually have a white
background on Windows.
%         See ISPC and COMPUTER.
if ispc &&
isequal(get(hObject,'BackgroundColor'),
get(0,'defaultUiControlBackgroundColor'))

set(hObject,'BackgroundColor','white');
end

% --- Executes on button press in
pushbutton1.
function pushbutton1_Callback(hObject,
eventdata, handles)
% hObject    handle to pushbutton1 (see
GCBO)
% eventdata  reserved - to be defined in a
future version of MATLAB
% handles     structure with handles and
user data (see GUIDATA)
global contents
n=str2num(get(handles.edit3,'String'));
b=1000;
a=0;
```

### Lanjutan Lampiran A

```

h=(b-a)/n;
t(1)=0;

K=str2num(get(handles.edit14,'String'));
lambda=str2num(get(handles.edit12,'String')
);
tetasatu=str2num(get(handles.edit13,'String')
);
msatu=str2num(get(handles.edit9,'String'))
;
m=str2num(get(handles.edit7,'String'));
de=str2num(get(handles.edit5,'String'));
miu=str2num(get(handles.edit10,'String'));
tetadua=str2num(get(handles.edit11,'String')
);
mdua=str2num(get(handles.edit6,'String'));
miusatu=str2num(get(handles.edit4,'String')
);
r=str2num(get(handles.edit8,'String'));

w1=zeros(1,n);
w2=zeros(1,n);
w3=zeros(1,n);

w1(1)=str2num(get(handles.edit16,'String')
);
w2(1)=str2num(get(handles.edit15,'String')
);
w3(1)=str2num(get(handles.edit17,'String')
);

for i=2:n+1

```

### Lanjutan Lampiran A

```
k1_1(i)=h*f_1(K,lambda,tetasatu,msatu,m,de
,miu,tetadua,mdua,miusatu,r,w1(i-1),w2(i-
1),w3(i-1));
```

```
k2_1(i)=h*f_2(K,lambda,tetasatu,msatu,m,de
,miu,tetadua,mdua,miusatu,r,w1(i-1),w2(i-
1),w3(i-1));
```

```
k3_1(i)=h*f_3(K,lambda,tetasatu,msatu,m,de
,miu,tetadua,mdua,miusatu,r,w1(i-1),w2(i-
1),w3(i-1));
```

```
k1_2(i)=h*f_1(K,lambda,tetasatu,msatu,m,de
,miu,tetadua,mdua,miusatu,r,w1(i-
1)+k1_1(i)/2,w2(i-1)+k2_1(i)/2,w3(i-
1)+k3_1(i)/2);
```

```
k2_2(i)=h*f_2(K,lambda,tetasatu,msatu,m,de
,miu,tetadua,mdua,miusatu,r,w1(i-
1)+k1_1(i)/2,w2(i-1)+k2_1(i)/2,w3(i-
1)+k3_1(i)/2);
```

```
k3_2(i)=h*f_3(K,lambda,tetasatu,msatu,m,de
,miu,tetadua,mdua,miusatu,r,w1(i-
1)+k1_1(i)/2,w2(i-1)+k2_1(i)/2,w3(i-
1)+k3_1(i)/2);
```

```
k1_3(i)=h*f_1(K,lambda,tetasatu,msatu,m,de
,miu,tetadua,mdua,miusatu,r,w1(i-
1)+k1_2(i)/2,w2(i-1)+k2_2(i)/2,w3(i-
1)+k3_2(i)/2);
```

### Lanjutan Lampiran A

```
k2_3(i)=h*f_2(K,lambda,tetasatu,msatu,m,de
,miu,tetadua,mdua,miusatu,r,w1(i-
1)+k1_2(i)/2,w2(i-1)+k2_2(i)/2,w3(i-
1)+k3_2(i)/2);
```

```
k3_3(i)=h*f_3(K,lambda,tetasatu,msatu,m,de
,miu,tetadua,mdua,miusatu,r,w1(i-
1)+k1_2(i)/2,w2(i-1)+k2_2(i)/2,w3(i-
1)+k3_2(i)/2);
```

```
k1_4(i)=h*f_1(K,lambda,tetasatu,msatu,m,de
,miu,tetadua,mdua,miusatu,r,w1(i-
1)+k1_3(i),w2(i-1)+k2_3(i),w3(i-
1)+k3_3(i));
```

```
k2_4(i)=h*f_2(K,lambda,tetasatu,msatu,m,de
,miu,tetadua,mdua,miusatu,r,w1(i-
1)+k1_3(i),w2(i-1)+k2_3(i),w3(i-
1)+k3_3(i));
```

```
k3_4(i)=h*f_3(K,lambda,tetasatu,msatu,m,de
,miu,tetadua,mdua,miusatu,r,w1(i-
1)+k1_3(i),w2(i-1)+k2_3(i),w3(i-
1)+k3_3(i));
```

```

w1(i)=w1(i-
1)+(k1_1(i)+2*k1_2(i)+2*k1_3(i)+k1_4(i))/6
;
```

```

w2(i)=w2(i-
1)+(k2_1(i)+2*k2_2(i)+2*k2_3(i)+k2_4(i))/6
;
```

### Lanjutan Lampiran A

```

        w3(i)=w3(i-
1)+(k3_1(i)+2*k3_2(i)+2*k3_3(i)+k3_4(i))/6
;

        t(i)=a+(i-1)*h;
end

axes(handles.axes2)
plot(t,w1,'k',t,w2,'m',t,w3,'r')

axes(handles.axes6)
plot3(w1,w2,w3)

switch contents

    case 1
        axes(handles.axes5)
        plot(w1,w2)

    case 2
        axes(handles.axes5)
        plot(w1,w3)

    case 3
        axes(handles.axes5)
        plot(w2,w3)

end

% --- Executes on button press in
pushbutton2.
function pushbutton2_Callback(hObject,
eventdata, handles)

```

## Lanjutan Lampiran A

```
% hObject      handle to pushbutton2 (see
GCBO)
% eventdata    reserved - to be defined in a
future version of MATLAB
% handles      structure with handles and
user data (see GUIDATA)

% --- Executes on selection change in
popupmenu2.
function popupmenu2_Callback(hObject,
eventdata, handles)
% hObject      handle to popupmenu2 (see
GCBO)
% eventdata    reserved - to be defined in a
future version of MATLAB
% handles      structure with handles and
user data (see GUIDATA)

% Hints: contents =
cellstr(get(hObject,'String')) returns
popupmenu2 contents as cell array
%           contents{get(hObject,'Value')}
returns selected item from popupmenu2

% --- Executes during object creation,
after setting all properties.
function popupmenu2_CreateFcn(hObject,
eventdata, handles)
% hObject      handle to popupmenu2 (see
GCBO)
% eventdata    reserved - to be defined in a
future version of MATLAB
```



## Lanjutan Lampiran A

```
% handles      empty - handles not created
until after all CreateFcns called

% Hint: popupmenu controls usually have a
white background on Windows.
%      See ISPC and COMPUTER.
if ispc &&
isequal(get(hObject,'BackgroundColor'),
get(0,'defaultUicontrolBackgroundColor'))

set(hObject,'BackgroundColor','white');
end

% --- Executes on selection change in
popupmenu3.
function popupmenu3_Callback(hObject,
 eventdata, handles)
% hObject      handle to popupmenu3 (see
GCBO)
% eventdata    reserved - to be defined in a
future version of MATLAB
% handles      structure with handles and
user data (see GUIDATA)

% Hints: contents =
cellstr(get(hObject,'String')) returns
popupmenu3 contents as cell array
%      contents{get(hObject,'Value')}
returns selected item from popupmenu3
global contents
contents = get(hObject,'Value');

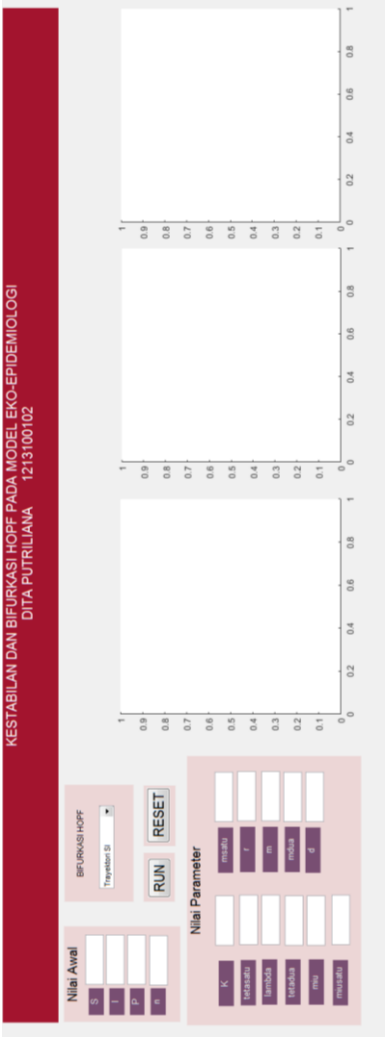
% --- Executes during object creation,
after setting all properties.
```

### Lanjutan Lampiran A

```
function popupmenu3_CreateFcn(hObject,  
eventdata, handles)  
% hObject    handle to popupmenu3 (see  
GCBO)  
% eventdata  reserved - to be defined in a  
future version of MATLAB  
% handles    empty - handles not created  
until after all CreateFcns called  
  
% Hint: popupmenu controls usually have a  
white background on Windows.  
%         See ISPC and COMPUTER.  
if ispc &&  
isequal(get(hObject,'BackgroundColor'),  
get(0,'defaultUicontrolBackgroundColor'))  
  
set(hObject,'BackgroundColor','white');  
end
```

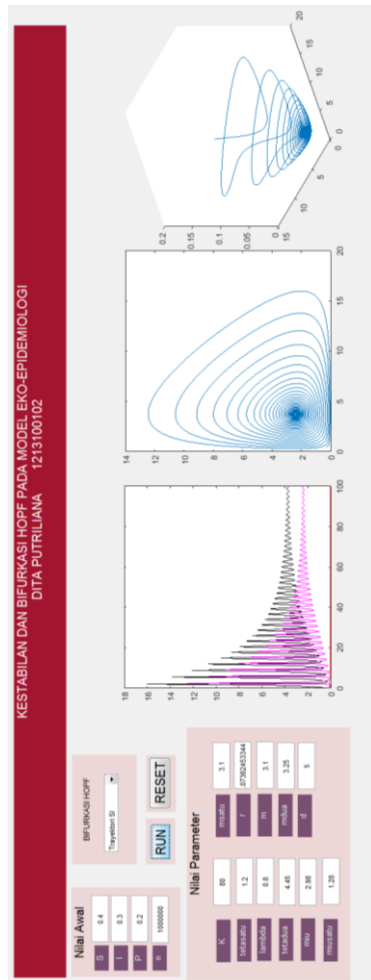
Lanjutan Lampiran A

- Tampilan Program GUI Sebelum Running



## Lanjutan Lampiran A

- Tampilan Program GUI Sesudah Running



## BIODATA PENULIS



Penulis bernama lengkap **Dita Putriliana**. Lahir di Sragen pada tanggal 14 Februari 1996 sebagai anak terakhir dari empat bersaudara. Dengan tiga kakak laki-laki bernama Dateng Aditya Graha, Bayu Anggoro, dan Cahya Danu Prastian. Penulis merupakan anak dari

pasangan Bapak Wuryano dan Ibu Sri Rahayu. Pendidikan formal yang pernah penulis tempuh antara lain TK Aisyah (2001-2002), SDN Plumbungan V Sragen (2002-2008), SMP Muhammadiyah 1 Sragen (2008-2011), dan SMAN 1 Sragen (2011-2013). Setelah lulus SMA pada tahun 2013, penulis melanjutkan pendidikan tingginya di Institut Teknologi Sepuluh Nopember Surabaya jurusan SI Matematika yang masuk melalui jalur SBMPTN tahun 2013 dan terdaftar dengan NRP 1211 100 120. Di Jurusan Matematika ini, penulis mengambil bidang Matematika Terapan. Penulis juga aktif di beberapa organisasi intra kampus diantaranya: UKM PSM ITS, UKM Musik ITS, dan Himpunan Mahasiswa Matematika. Untuk informasi lebih lanjut mengenai penulis dan Tugas Akhir ini silahkan hubungi penulis melalui

Email : [ditaputriliana@gmail.com](mailto:ditaputriliana@gmail.com)

Instagram : @ditaputriliana